

逻辑与演绎科学方法论导论

塔尔斯基著

周礼全　吴允曾　晏成书合譯

内部发行

商　务　印　书　馆



邏輯与演繹科学方法論导論

塔尔斯基著

周礼全　吳允曾　晏成书合譯

内部讀物

商务印书館

1963年·北京

Alfred Tarski

INTRODUCTION TO LOGIC AND TO THE METHODOLOGY OF DEDUCTIVE SCIENCES

Revised edition 1946
Oxford University Press.
New York

Original in Polish language
Translated by Dr. O. Helmer
From German

内部讀物

邏輯与演繹科学方法論导論

塔尔斯基著

周礼全 吳允曾 晏成书合譯

商 务 印 书 館 出 版
北京复兴門外翠微路
(北京市书刊出版业营业許可证出字第107号)
新 华 书 店 經 售
新 华 印 刷 厂 印 装
統一书号：2017·82

1963年3月初版　　开本 850×1168 1/32
1963年3月北京第1次印刷　　字数 213 千字
印張 9 6/16　　印数 1—3,000 册
定价 (9) 1.30元

俄譯本序言

著名的波兰数学家和邏輯家塔尔斯基的这本书，是数理邏輯和演繹科学方法論的通俗引論，它值得受到苏联讀者的注意。它在 1936 年以波兰文出版，1937 年譯成德文，由德国著名的斯普林格书局在維也納而不在德国出版。尽管如此，这并沒有帮书局的忙，书局沒有来得及在 1938 年德国并吞奥国以前把书全部推銷出去，因此有一部分始終被擱在书店的仓庫里……这是由于种族歧視的緣故。1941 年书的校訂和补充版本在紐約用英文出版，俄文翻譯是根据这个版本完成的。

这本书原来称为《数理邏輯和数学方法論导論》。这个名称与內容更相符合，因为这本书是一門科学的导論，这門科学的主要結果多半是数学专家在二十世紀近几十年获得的。尽管数理邏輯的工具以及数理邏輯中所使用的符号“語言”具有很专門的性质，作者成功地引导讀者到这里所考虑的問題的領域中去，几乎沒有用任何的专門符号，而使用通俗易解的語言。书中所涉及的問題的范圍很广，讀者在这里会找到关于命題邏輯問題的討論，关于集合(类)、性质、关系、函数、运算、同一与相異等概念邏輯方面的討論，关于形成概念的原則(包括所謂的抽象原則)和定义概念的方法的討論，以及关于形成命題和从一些命題推出一些命題的方法的討論，等等。书中有专門的章节用来討論演繹理論构造的原則，这就是所謂的公理学方法，和与之相联系的无矛盾性和完全性問題。一些最一般的数学理論的构造是在表示現代数学特点的方法和概念(例如，从集合論或阿貝尔群論借用来的方法和概念)的基础上

作出的；自然，所有陈述出来的原则都可以应用到这些最一般的数学理論的构造上去。

作者在书的序言中說明了自己对于数理邏輯与演繹科学方法論的意义和本质的一般观点。为了批判地討論他所提出来的原理，首先那怕是粗淺地說明一下我們对于书中所討論的問題的真实意义的見解，在我看来是适宜的。我們简单地讲两点。

1. 与形而上学相反，唯物辯证法教导說：真理总是具体的，也就是說，在此时此地和一定条件下真的东西，在另一地点、另一时間或者在另一些条件下可能不真。因此，对于所有用一般形式提出来的問題，不能給出“断然的”回答，是或否。斯大林在1904年写道：“伯恩施坦的信徒們也曾要求馬克思主义者同样断然地回答下面这个問題：合作社（即消費生产互助社）对于无产阶級有益还是有害？馬克思主义者当然不难证明，这样提出問題是毫无意义的。他們很簡明地解釋了：一切都以时間、地点为轉移，——在无产阶級的阶級觉悟已提高到应有程度的地方，在无产者已团結成一个强固的政党的地方，如果合作社是由党着手建立和領导的，那它对无产阶級就会有很大的益处；而在沒有具备这些条件的地方，合作社对于无产阶級就会是有害的，因为合作社能使工人产生小商人的傾向和行会的閉关自守的心理，从而损害工人的阶級觉悟。”①

我們知道，从形式邏輯的規律，例如矛盾律和排中律，得出“断然的”回答，“是”或“否”，是永远可能的，但是形式邏輯的規律却不能机械地应用到所有的命題上去，像形而上学者在这点上所想的那样。

① 《社会民主党怎样理解民族問題？》，《斯大林全集》第1卷，人民出版社1953年版，第42—43頁。

研究者的技巧相当大的程度上在于，估計到环境、地点和时間这些具体条件，这样来提出問題，以便形式邏輯的規律适用于它們，以便对于問題的回答能說明所研究对象的一些最本质的方面。① 难怪人們說，問題的正确提法有时并不比問題的解决价值少。既然数学所处理的是比較普通的对象和关系，在这里获致精确的提法也就比較容易。然而，为了这个目的就不仅要拟定专門的术語，而且要制作出一些科学的、"形式化"的特殊方法，这些方法是数学所特有的，因为在数学中我們所处理的是字母演算。

其实，这种方法是自发地創造出来的，从古代开始，在像欧几里德或者阿基米德这些数学家的著作中就已經有了。由于洛巴契夫斯基的偉大发現及現代集合論数学的建立，产生了一系列的問題。这一系列的問題使得数学家把原来屬于邏輯和数学方法論領域的数学证明論的問題作为专門研究的对象。在現代，数理邏輯以及和它直接联系的演繹科学方法論是一門相当发达的科学，有它特有的問題范圍；有科学研究的专門工具；以及一系列最后确立的有意义的重要結果，这些結果既是借助于分析現有演繹理論所获得的，同时也預告着这些演繹理論的发展，因为它們屬于一定种类的任何可能的演繹理論。既然这里首先考虑的正是一些数学学科，并且所談的那些結果基本上是用数学方法得到的；那么系統地充分地說明它們必須以专門的数学修养为前提。可是作者还是成功地說明了十分广泛范圍內的問題，而沒有假定讀者有超出中等学校数学課程大綱的訓练。还因为，例如說，相应于所討論的內容，

① 同时应該注意，当情况变化时，也必須相应地改变問題的提法，因此，只有彻底辯证唯物主义地說明对象（即邏輯的和历史的处于統一之中，而邏輯的包括历史的），才是正确的。（前面所举的例子教导我們，恰恰是当某种条件变化时，公式也应該改变——这个例子特別說明了这一点。）

“形式化”方法的选擇和陈述的精确性問題，① 具有一般的科学意义，所以对于不接近数学的讀者，塔尔斯基的书也能够引起兴趣。

2. 对于邏輯感觉兴趣，特别是对于其中的現代数理邏輯部分感觉兴趣的讀者，在书中会找到一些內容，使他能够对于数理邏輯的內容和方法形成清晰的概念，并且使他能够闡明数理邏輯的基本特点。这使他可能熟諳地批判地对待資产阶級哲学家的企图，他們想利用这个領域中科学的进展向唯物主义进行斗爭，和宣傳露骨的或混乱的折衷主义和唯心主义的哲学立場（其中包括本书作者本人在內）。在这方面我們只想提請讀者注意作者所熟练应用的数理邏輯的特点（它与一切字母演算共有的特点），以及他一再强調的，数理邏輯与数学的密切联系。

字母演算之引入［为維他（F. Vieta, 1540—1603）和笛卡儿（Descartes, 1596—1650）在17世紀前半期所引入］到数学中，在这門科学的发展中起革命性的作用。恩格斯說，“笛卡儿的变数是

---

① 追求“形式化”的科学的严格性、精确性和确定性、眞正反映事物的本质，根据眞理的具体性原理的构造，自然，应該把这一切区别于煩瑣哲学的玩弄“严格性”和相应地“創作”形形色色的专門术語的詭計与毫无內容的空洞“形式”。我們看到，眞正科学的“形式化”本身可能是新的，对于科学发展很本质的問題提法的源泉。例如，对于数学中連續曲綫概念来說，就是如此。很长一个时期它好像是立即明显的，而不需要說明。在18世紀末与数学物理問題相联系产生一場“关于声弦”的热烈爭論，在这場爭論中，有像欧拉（L. Euler, 1707—1783）、达兰貝尔（d'Alembert, 1717—1783）、貝努义（Bernoulli, 1700—1782）和拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）这样一些卓越的数学家参加，这使得数学家們相信，事情不是像看起来那样簡单。在19世紀引入的連續性概念的精确陈述头一次使得能够严格的证明一系列的命題，以前数学家实际上在大量的情形中利用这些命題而沒有意識到連續性概念。然而不久发現，連續性定义的这种陈述意外地滿足象填滿整个正方形所有点的貝安諾曲綫，或連續而无处可微分的波查諾、魏尔施特拉斯函数，这种函数对应于在每一个点上沒有方向的曲綫。这些发現对于科学的进一步发展具有根本的意义。一方面，这样被发現的曲綫是具有深刻的現实意义的。另一方面，連續性概念进一步区分的問題提出来了（而且已經解决），这种区分使得能够更好地表現原来考虑的，然而还不能精确定义的形式。

数学中的轉折点。”

虽然在“变数”和变数在現代数学中的使用之間有一个本质的差異，但是維他和笛卡儿所創造的字母演算和作为現代数学的特点的演算已經有了許多共同的特点。它們的基本特点在于，虽然在口头論述中沒有人想到把命題相“加”或者相“乘”——用表达命題的公式，可是在这些演算中却已經可能根据有时很像普通算术那样的規則来进行演算。例如，可以依一定的方式加等式或不等式，用数去乘它們等等。大概任何曾經学过代数的人也都会記得，用数学中使用变数特有的代入規則来代替从一般到特殊的普通代换，例如教他不說“因为被加数的次序对于和数无关，所以 $7+5=5+7$”，而要他在公式 $a+b=b+a$ 中把 $a=7$, $b=5$ 代进去是多么不习慣。

不用說，一般而論，沒有公式的使用，一些数学推論几乎不能实現，公式的使用有时在非数学家看来，好像是特別为了使人难于理解数学著作而創造的。其实，略微熟悉数学公式就使我們能把它們分成两組：

(1) 公式

$$2+2=4,$$

$$2+2=5,$$

$$2<3,$$

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2,$$

表示眞或假，而

(2) 公式

$$2+2,$$

$$\frac{2\cdot(3+2)}{7},$$

$$2\sin\frac{\pi}{5},$$

$$\log_{10}3,$$

表示一些对象(不同于眞和假的)，在所給的情形中，它們表示完全确定的数。后一种公式的显著特点表示：像“4”一样，“2+2”也是一个确定的数的指示詞，公式$\frac{2\cdot(3+2)}{7}$不仅表示由

(1) 3和2相加，

(2) 二倍所得的結果，

(3) 把所得的除以7。

由一系列运算組成的获得某数的方法，而且还有由这个方法得到的結果，在这里，这結果与数$1\frac{3}{7}$相同。

还要注意，正是結果与导致它的方法的这个辯证的統一在現代数学中广泛地得到利用，这样，借助于指出一个对象可以由其它几个对象来构造的方法，使我們能規定这个对象(例如，定积分)。我們也要指出，在数学中某些困难和这有关，这些困难是这样引起来的，即，事实上不是每一种方法都得出結果；因此需要一种标准，使得我們能够把“收斂”的方法和那种不能有意义地得出确定結果的方法区别开来。

这种特点引起了要特别研究邏輯方法的願望，这些邏輯方法正是数学演算的特征。另方面，甚至这种研究的最初尝試应該是推动研究者去发現下述情形，即这种方法不过是普通邏輯規律的另外一种形式，或許邏輯本身也可以解釋成为某种演算(至少在这里所說的数学中所用的邏輯方法是如此)，这是不奇怪的。

萊布尼茲(Leibniz, 1646—1716)第一个从事这样的尝試，他把維他和笛卡儿的字母演算的思想推广到他所建立的微积分学上

去,① 也推广到邏輯上去。然而在邏輯領域中萊布尼茲的思想对于这一科学的发展沒有发生重要的影响。19 世紀一些数学家和邏輯学家作了一系列的努力来建立邏輯代数，其中必須首先提到德·摩根(A. De Morgan, 1806—1878),布尔(G. Boole,1815—1864),皮尔斯 (Ch., S. Peirce, 1839—1914)，习玉德(E. Schröder, 1841—1902),俄罗斯学者喀山数学家和邏輯学家波列茨基(П. С. Порецкий, 1846—1907)。但是只是在20世紀这些研究才受到眞正的注意,这时与数学基础的危机相联系,关于在数学基础中所容許的构造对象或者規定对象的手段，和命題证明的手段的間題便尖銳地突出出来了。

誠然,关于和数学基础的危机相联系的問題,塔尔斯基在他的书中几乎沒有談到；在书中沒有說明一系列数学基础原有的重要結果,例如,与形式化“語言”中“眞理性”概念相关的結果或与演繹理論的“无矛盾性”和“完全性”的各种定义相关的結果。他觉得它們对于通俗的叙述过于困难,而他屡次强調,他的书只是个引論。作为引論，这本书实在令人满意。书的开端已經很好；一开始，作者就闡明数学中的值和数学中使用的变数方法，而且立即討論作为数学学科的特点的两种类型的公式：(1)命題函項,和(2)指示函項。也应当指出这种情形，就是作者成功地避免了在书中有过多的形式計算,而把相应的材料放到练习中去。当然,最后这一点是以讀者能够做出所有附在每一章后面的练习，包括那些对于演算工具的构造原則上很重要的間題为先决条件的。这些练习中的多

① 上面我們援引的恩格斯的話完全說出来是这样的:“笛卡儿的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯证法便进入了数学,因此微分和积分也就立刻成为必要的了,而它們也就立刻产生出来，并且整个讲来它們是由牛頓和萊布尼茲完成的，而不是由他們发現的。”(《自然辯证法》,人民出版社,1955 年版,第 217 頁)

数是适当地选擇和表述出来的，它們是这样簡单，的确使得讀者能够独立地做出来。

在本书的哲学方面，情形就坏得多。作者在一系列的場合有着形而上学的，有时接近馬赫主义的、混乱的唯心主义的观点。所以，他强調在数学中不存在“变数”之类的对象，說它“不可能有任何确定的性质，例如它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說，x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以是負数，有时又可以等于零。”在这个地方他以以下的話作結：“这样一种东西，在我們的現实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于現实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的。”(§1)結果：客观世界的規律为我們的思維規律所制約，这是露骨的唯心主义和形而上学的主張。因为，相反，在現实世界中一切在变化着和运动着；具有某种性质的对象会失掉这种性质；相反，沒有某种性质的对象也可以有这种性质；必須多研究具体材料，以便在变化中划分出稳定的、不变的东西，以便反映运动，然后再找出在变化中的不变的規律(規律就是稳定的东西)，等等。“如果不把不間断的东西割断，不使活生生的东西簡单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么我們就不能想像、表达、测量、描述运动。思維对运动的描述，总是粗糙化、僵化的。不仅思維是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。

这也是辯证法的本质。对立面的統一、同一这个公式正是表現着这个本质。”① 塔尔斯基的书的相当一部分內容事实上正是关于科学的概念和命題的“形式化”方法，其目的在使它們服从形式

① 列宁：《哲学笔記》人民出版社，1957年，第263頁。

邏輯的規律。閱讀这本书有时給人一种印象，似乎作者认为演繹理論的命題本身，完全自动地預先就服从这要求。誠然，在他的专門性著作中，我們沒有遇到这种情形。

塔尔斯基的哲学立場毕竟不是十分确定的。作为創造性地工作着的数学家，他有时自发地站在健康的唯物主义立場上。例如，他——当然，有保留地，并且也沒有指出姓名——反对罗素（Russell）有名的說法：在数学这种科学里，我們不知道我們在說什么，也不知道我們說的是否眞实。他写道："我們必須批判地看待这些判断……有时我們发展一种演繹理論而对于它的基本詞項不賦与任何固定的意义，这样就是将这些基本詞項看作变項；在这种情形之下，我們說我們将这一理論看作一种形式系統，但这是比較少見的情形（即使考虑到§36中对于演繹理論的一般刻划中所說的也是如此）。仅当对于这一理論的公理系統可能給以几种解釋时这种情形才会发生，也就是說，如果对于这一理論中的詞項可以有几种不同的方式賦与意义，而我們不願意特別着重任何一种时，才会发生。"（§38）

在某种程度內关于他对于邏輯的态度也可以这样說。一些現代的邏輯家从反动的資产阶級哲学和馬赫主义达到数理邏輯，① 作者和这些邏輯家不同，他不把邏輯看成是任意的"語言"，而且认为邏輯不应当发生在任何內容丰富的科学理論之先。依照他的說法，他是用"邏輯"一詞来"称呼这样一种科学的，这种科学分析一切科学中共同的概念的意义，建立这些概念所服从的一般規律"与关于邏輯的对象或內容的問題相联系，他談到思維的規律，还談到在邏輯中我們一般不处理任何个别的概念（它們对应于性质和

① 例如卡尔納普（R. Carnap）就是这种人。

关系)或个别的对象。① 然而在书中关于这些問題我們沒有找到十分明确的东西。首先，哲学的基本問題——关于思維与存在之間的关系的問題，从而在思維規律和其中所反映的自然与社会的規律之間的关系的問題——仍然暧昧不明。数学与邏輯之間的关系問題也沒有对讀者說清楚。要知道，像“一”、“二”等这样一些概念能够用邏輯的詞項来表示，它們仍然是个别的概念(并未变成可以把任何的个别概念放到它們的位置上的变数)！此外，既然主張：只要把无穷性公理包括在邏輯中，就可以把算术看成邏輯的一部分，那么甚至对讀者也会造成一种印象：这个問題本质上是无意义的，假如，依照定义，把数学的基本概念和公理包括在邏輯中，那么数学，或者至少是它的某一部分，自然将是邏輯的一部分。

这里我們不可能把我們认为需要批判或者詳述的地方一一細說。并且，大多数場合，这需要先熟悉书的正文。因此，在这些地方，編者认为給以附注比較妥当。这里我們只談一个具有原則意义的問題。

从辯证唯物主义观点看来，实踐不是在理論之外的某种东西。理論依賴于实踐，假如它不为实踐所证实，它就沒有意义。归根結底，只有一个眞理的标准——实踐的标准。假如形式邏輯的证明使我們相信数学命題的眞实性，那么这是由于借助于这样的证明，所給命題的眞实性归結为：(1)其它一些命題即被当作公理的那些命題的眞实性，所給命題的眞实性归根結底是由于这些命題的眞实性；及(2)在证明中所用的邏輯推論方法的正确性。两个問題都須由实踐来解决。列宁說：“人的实踐活动必須亿万次地使人的意識去重复各种不同的邏輯的格，以便这些格能够获得公理的意

① 在苏联学者波茨瓦尔(Д. А. Бочвар)手中，邏輯的这种了解成为解决邏輯的和集合論的諄論的有效方法。

义。"[①]

在另一个地方列宁写道："为我們的实踐所证实的是唯一的、最終的、客观的眞理。"[②]誠然，实踐的标准不是"僵硬的"，从列宁的观点看来，优点，而非缺点，正在于此，它保证科学无限发展的可能性。列宁說："当然，在这里不要忘記，——实踐标准实质上决不能完全地证实或駁倒人类的任何表象。这个标准也是这样的'不确定'，以便不至于使人的知識变成'絕对'，同时它又是这样的确定，以便同唯心主义和不可知論的一切变种进行无情的斗爭。"[③]

但是塔尔斯基的看法不是这样。讀到本书某些地方，使人不由得产生一种印象：对于作者，理論和实踐几乎是两极化的对立面，它們可以是互不相容的。如果有人想使我們相信：造永动机和魔桌布在"理論上"是很重要的，但是"可惜"，"实踐上"这不能实現，因为它違反能量守恒定律，对于这样的人我們說些什么？——显然，我們反对这种提出違反物理規律的方案的"理論"。

关于哥德尔(K. Gödel)的工作，作者写道，哥德尔的工作证明，要建立所有眞的算术命题都可用以证明的"形式系統"是不可能的。誠然，塔尔斯基并沒有由此做出什么明显的不可知論的結論来。他仅"限于"指出，用这一点就可以說明，为什么尽管完全性概念对于演繹理論有非常巨大的理論上的重要性，在实踐上它对于演繹理論的构造只发生很小的影响。然而他沒有談到哥德尔所指的是什么样的"完全性"。这个概念有各种不同的意义，各个意义都不仅可以用，而且事实上已經用上了，但是，他根本沒有談到这些不同的意义，尽管像已經指出来的，在这个領域中这个概念有一些有趣

① 列宁：《哲学笔記》，人民出版社 1956 年版，第 175—176 頁。

② 《列宁全集》第 14 卷，人民出版社 1957 年版，第 143 頁。

③ 《列宁全集》第 14 卷，人民出版社 1957 年版，第 142—143 頁。

的結果：其实，事情的实质在于，这里所指的是形式系統，形式系統只包括有穷个公理和推理規則，每个公理和推理規則由确定的、能行地实現的运算所构成。如果对“完全的”形式系統一語我們同时还作这样的理解：在其中所有用一定的詞項表示的命題，或者是被证明或者是被否证，那么这意味着，問題是关于工具的构造，理論上(和实踐上!)与之等价的能完全代替人的思維(应用到所討論的理論的命題上)的机器的构造。自然，任何一个馬克思列宁主义者不会想到反对創造任何能运算的机器，特别是运算繁重和令人厌倦的計算題的机器。然而他不会想到，也不会认为在实踐上无法实現的幻想的机器在“理論上是重要的”。①

我們要指出，关于演繹理論的无矛盾性和完全性在理論上的重要性，和它們在各种情形中(或对它們的不同的处理办法中)实际上实現的可能性，讀者在塔尔斯基的书中，无論如何，找不到充分的材料。这些問題的通俗說明实在也困难，而且每一項都要費不少的篇幅。我們只說一点，哥德尔定理并沒有使算术无矛盾性的一些证明，例如，我們在苏联数学家諾維科夫(П. С. Новиков)和干称(Gentzen)的著作中見到的证明，失去意义；再者，甚至证明对于不論那一个普通邏輯的“形式系統”都不可解的問題的存在的一些最抽象的結果也已經使人能够解决若干早已提出，然而迄今沒有解决的数学問題。② 自然，不言而喻，在这里理論与实踐处于

① 如果在某个时候以前还能认为数学学科与其它科学不同是由于：用数学科学語言表达的眞命題組成的整个无穷集合可以由确定的、預先列举出来的而且容易檢驗的規則，即从有穷个、甚至不多的通常取作公理的規則得到，那么現在我們知道，对于通常的算术，这些期望看起来是不可实現的。算术完全不应得到黑格尔給它的那种輕視，黑格尔以为在这門科学中思維能够被自动机代替，这种意見馬克思和恩格斯从来沒有同意过。現在这一点得到了证明，尤其是从算术对于邏輯問題和数学方法論問題的应用是富有意义的这一事实上得到了证明。

② 这一类的一系列問題已为苏联数学家馬尔科夫(А. А. Марков)所解决。

統一之中，而不是与实踐对立的。

作者指出“未来的邏輯学像所有理論科学一样，本质上依賴于人类政治的和社会的相互关系納入規范，”自然，他是正确的。

但是他以为，社会因素在职业学者的活动范圍之外，以及邏輯知識的傳佈可以自然而然地促进人們之間更好的相互了解，这一点他是錯誤的。美国反动集团使科学的进步服务于帝国主义侵略目的的企图再一次证实，在科学周圍和在科学之中尖銳的政治和意識形态的斗爭是不可避免的，在这个斗爭中学者們不可能始終是旁观者，而不无变成帝国主义和反动勢力的帮凶的危险。

雅諾夫斯卡婭

初版序言

根据許多門外汉的意見，数学今天已經成为一門死科学：在达到不寻常的高度发展水平以后，它已經在一种严格的完全性中僵化了。这是对情况的一种完全錯誤的看法。在科学研究領域中現在很少有象数学那样經历着如此剧烈的发展阶段。而且，这种发展是极其多样化的：数学領域正在向一切可能的方向伸展，它在高、寬和深三方面都在成长着。它的高度在成长着，因为在数百年来（如果不是数千年以来的話）发展的旧的理論的土壤之上，新的問題不断地发生，而其所达到的結果越来越完全。它的寬度在成长着，因为它的方法滲透到其他各种科学部門中，而其研究的范圍日益囊括着越来越广泛的現象界，并且越来越多的新的理論被包括在数学学科的龐大的范域之中。最后，它的深度在成长着，因为它的基础日益坚定地被建立起来了，它的方法日益完备，它的原則日益巩固。

本书的目的就是要向那些对于現代数学有兴趣、而不曾实际参与它的工作的讀者們，至少在数学发展的第三个方面、即其在深度方面的成长提供一个最一般的观念。我的目的是要使讀者熟悉一种名为数理邏輯学科的最重要的概念，这門学科是为了把数学建立在更坚固、更深刻的基础上創造出来的；这一个学科，虽然它的存在只有短短的一个世紀，却已經达到了高度的完全性的水平，而且在我們的知識的总和中它今天所起的作用远远超越于其原定的范圍。我的目的是要表明，邏輯的一些概念滲透到数学的整体中，它把所有的专門的数学概念了解为特殊事例，并把邏輯規律恒

应用于——自觉的或不自觉的——数学推理之中。最后，我試图提出构造数学理論的一些最重要的原則——这些原則也构成另外一种学科、数学方法論的主題——并指明怎样在实际上着手应用这些原則。

在这一本相当小的书的范圍中，不假定讀者有任何专門的数学知識或抽象的推理的任何专門的訓练，要徹底地实現这全部計划是不容易的。在这一本书中，必須从头到尾力图把最大的可理解性和必要的簡明性以及經常注意避免錯誤或从科学观点看来的粗糙的不精确性結合起来。其所用的語言必須是尽可能少地脫离日常生活的語言。必須放棄使用专門的邏輯符号，虽然这种符号是使我們把簡明性和精确性結合起来，并使我們尽可能地排除含混和誤解的可能性、从而在一切精細的思考中具有很大用处的极其宝貴的工具。必須把系統地处理的观念从一开始就放棄掉。在出現的很多問題之中只有少数能够詳細地討論，其他一些問題仅仅肤淺地接触到，还有一些問題則完全忽略过去了，并且我意識到，所討論的題目的选擇不可避免地表現了或多或少的任意性。对于現代科学还沒有采取任何确定的态度，而是提出了許多可能的、同样正确的解答的那些事例，不可能客观地把所有已知的見解都提出来。不得不作出支持某一确定見解的决定来。当作出这种决定的时候，我是十分小心的，不是首先使之符合于个人的兴趣，而是宁取一种尽可能簡单的并且适合于普通表达方式的解法。

我并不幻想我已經成功地克服了这些以及其他一些困难。

序　　言

本书是我的《論数理邏輯和演繹方法》(該书1936年最初用波兰文出版,又于1937年出版了确切的德文譯本——书名是:《数理邏輯和数学方法論导論》)一书部分修正了的和扩充了的版本。最初写这本书,是企图把它当作一本通俗的科学著作;其目的是向受过相当教育的普通讀者提供——用把科学的严格性和最大的可理解性結合起来的方式——集中于現代邏輯的强大的現代思潮的一个清楚的观念。这个思潮最初是从多少受到局限的巩固数学基础的任务发生的。可是,在現阶段它却具有远为广泛的目的。因为它試图創造出可为人类知識的整体提供一种共同基础的統一的概念工具。此外,它有助于使演繹方法完全化和敏銳化,这种演繹方法在某些科学中被当作确立眞理的唯一的允許的方法,而且,的确,它至少在一切智力活动的領域內,是从被公认的假設中推导出結論来的必不可少的补助的工具。

根据对波兰文版和德文版的反应,特别是某些評論者的建議,产生了一个想法,要使这个新的版本不仅仅是一本通俗的科学著作,而且也是大学里的邏輯和演繹科学方法論的初級課程可以作为藍本的教科书。由于在这个范圍內合适的初級教科书相当缺乏,这一尝試就显得更为合适。

为了要进行这种尝試,必須在书中作某些改变。

在前几版中,把某些最基本的問題和概念完全忽略过去或仅仅略微触及,这或是由于它們比較地具有专門性,或是为了避免一些具有爭論性的論点。像这样一些題目,例如:在邏輯的有系統的

发展中和在日常生活的語言中某些邏輯观念的用法之間的区别，证明語句演算的規律的一般方法，語詞与其名字之間的明确区别的必要性，全类和空类的概念，关系运算的基本观念，以及最后，作为各科学的一般科学的方法論概念。在这一版中，所有这些題目都討論到了（虽然所有这些題目并非同等詳尽地討論了的），因为我似乎觉得在現代邏輯的任何一本教科书中，不談这些題目就会造成一种根本的缺陷。因此，本书前面的几章，即概論部分或多或少地扩展了；特别是第II章，即专門討論語句演算的一章包含着很多新材料。对于这几章我又补充了許多新的练习，并且增加了历史的綫索的資料。

在前几版中，专門符号的应用是縮减到最低限度，而在这一版中我以为有必要使讀者熟悉邏輯符号的基本知識。但是，实际上这种符号的应用仍然受到很大限制，并且大部分限定在练习中。

在前几版中，为了說明一般的和抽象的思考而引出例子的主要領域是中学数学；因为我过去和現在都认为，基本数学、特别是代数，由于它的概念的簡单性及其推論方法的一致性，特别适合于例证邏輯的和方法論性质的各种基本現象。但是，在这一版，特别是在新补充的篇幅中，我經常从其他領域、特别是从日常生活中举出了一些例子。

除了这些增补以外，凡是学习者們較难以掌握的某些部分我也都重新写过了。

本书的基本面貌仍然沒有改变。初版的序言（其主要部分重新发表在前面）将会为讀者提供一个本书的一般性的观念。然而，也許有必要在这里很清楚地指出来讀者在这本书中所找不到的是一些什么东西。

第一，本书不包括邏輯的、系統的和严格的演繹的陈述；这样

一种陈述显然不在一本基本的教科书的范圍之內。我原来企图在这一版中增加一章，名为作为演繹科学的邏輯，这一章——作为包含于第VI章中的一般方法論意見的一个說明——会为邏輯的某些基本部分的有系統的发展提供一个綱要。由于种种原因，这个企图未能实現；但是我希望包括在第VI章中的关于这个題目的几个新的练习在某种程度內将会补偿这个省略。

第二，除了两处很少的篇幅以外，这一本书沒有提供关于傳統的亚里士多德的邏輯的知識，并且不包含从之引伸出来的材料。但是，我相信这里給予傳統邏輯的篇幅是充分符合于它在現代科学中已經減低了的微小的作用的；而且我还相信我这个意見将会得到大多数現代邏輯学家的贊同。

最后，这一本书不涉及屬于所謂經驗科学的邏輯和方法論的任何問題。我必需說，我傾向于怀疑，作为与一般邏輯或"演繹科学的邏輯"相对立的任何特殊的"經驗科学的邏輯"究竟是否存在（至少，按照"邏輯"一詞在本书的用法——这就是說，它是一种学科的名称，这种学科分析一切科学所共有的一些概念的意义，并建立支配这些概念的一般規律）。但是这与其說是一个实际的問題，还不如說是一个术語的問題。总之，經驗科学的方法論构成科学研究的一个重要領域。当然，邏輯的知識在这种方法論的研究中，正如在任何其他学科中的情况一样，是宝貴的。可是，必須承认直到今天邏輯概念和方法在这个領域內并未得到任何特殊的或有成效的应用。并且至少这个情况可能不仅仅是現阶段方法論研究的一个后果。可能，这是由于下述情况所引起：为了对方法論作适当的論述，必須把經驗科学作为不仅仅是一种科学理論——就是說，作为按照某种規則所排列起来的确定的命題体系——而且是部分的由这样的命題和部分的由人类的活动所构成的复合物。

还必需补充說，与这种經驗科学本身的高度发展显著地相反，这些科学的方法論很难夸耀有相应的确定的成就——尽管已經作了很大的努力。甚至这个領域所涉及的初步概念澄清工作也还不曾进行得令人满意。因此，經驗科学的方法論課程必定具有一种有别于邏輯課程的完全不同的性质，而且它必定是大部分限于对試驗性的探索和失败的努力的估价和批評。由于这些和其他一些理由，对于把邏輯和經驗科学方法論的討論結合于同一个大学課程之中，我认为很少合理的根据。

关于本书及其用作大学教科书的安排方面有几点說明。

本书区分为两部分。第一部分是邏輯和演繹科学方法論的一般的导論；第二部分，借助于一个具体的例子，表明邏輯和方法論在数学理論的构造中的一种应用方式，并因而为消化和深化在第一部分中所获得的知識提供一个机会。每一章的后面都附有相当的练习。簡明的历史的綫索写在脚注中。

記有星标“*”的部分、甚至于整节，不論記在开始或末尾，都包含着較难的材料，或者假定讀者已熟悉包含着这样的材料的其他篇章；省略掉这些部分对于本书以下一些部分的理解不会有什么妨碍。这也适用于凡在号碼前記上一个星标的各个练习。

本书包含着足够全年課程用的材料。不过，它的編排也使它同样适用于半年的課程。如果把它用为哲学系的半年邏輯課的課本，我建議学习整个第一部分、包括較难的部分在内，而完全略去第二部分。如果把本书用为数学系的半年課程——例如，数学基础課——的課本，我建議学习本书的两个部分，而略去較难的部分。

无論如何，我願意强调小心地和詳尽地作好练习的重要性；因为它們不仅有助于对所討論的概念和原則的消化，并且也还触及

正文中沒有机会討論的許多問題。

如果本书对于邏輯知識的更广泛的傳播有所貢献的話，我将感到很快乐。历史事件的进程已經使現代邏輯的一些最杰出的代表集中在这个国家（指美国——譯者），并因而为邏輯思想的发展在这儿創造了特别有利的条件。自然，这些有利的条件可能很易于为其他更强有力的因素所抵消。显然，未来的邏輯学，象所有理論科学一样，本质上依賴于人类政治的和社会的相互关系納入規范，因而依賴于一种超越于职业学者的控制的因素。我并不幻想邏輯思想的发展会对于人类关系的正常化过程特别起很重要的作用；但我相信，邏輯知識的广泛傳播可以积极地加速这个过程。因为，一方面，由于使概念的意义在其自身范圍內精确并一致起来，以及由于强調这样的精确性和一致性在任何其他領域中的必要性，邏輯就使凡是願意很好地了解的人們都可能彼此很好地了解。并且，另一方面，由于思想工具的完全化与敏銳化，它使人們更有批判性——因而他們就不大容易为所有伪推論引入歧途，現在在世界各处他們不断有被这种伪推論引入歧途的危險。

我衷心感謝海尔麦（O. Helmer）博士的帮助，他把德文版譯成了英文。我願意对于霍夫斯塔德泰尔（A. Hofstadter）博士、克拉德尔（L. K. Krader）先生、納盖（E. Nagel）教授、蒯恩（W. V. Quine）教授、怀特（M. G. White）先生、特别是麦克鏗賽（J. C. C. McKinsey）博士和溫納（P. P. Wiener）博士表示最热誠的感謝，当我准备英文版时，他們慷慨地提出了意見并給予帮助。我也感激阿罗（K. J. Arrow）先生，他帮助閱讀了校样。

塔尔斯基

1940 年 9 月于哈佛大学

本书是英文第一版的影印本，不可能在其中作很大的改动。

不过，印錯的地方已經改正了，并在細节方面作了一些改进。对于讀者和評論者的有益的建議，我表示感謝，我特别感激秦 (Louise H. Chin)女士，因为她帮助准备了这一版的出版。

塔尔斯基

1945 年 8 月于加里福尼亚大学，
貝克萊

目　录

第一部分　邏輯的元素，演繹方法

第二部分 邏輯和方法論在构造数学理論中的应用

第一部分　邏輯的元素，演繹方法

(I)　論变項的用法

§1. 常項与变項

每一种科学理論都是許多語句組成的系統。这些語句都是被断定为真的，可以叫做定律或断定了的命題，或者，就簡单地叫做命題。在数学中，这些語句都按照一些原則(在第 VI 章中将詳細討論这些原則)一个接着一个地排成确定的序列。在数学中，这些語句的正确性都要建立起来。建立語句的正确性，就叫做証明。被証明过的語句，就是我們所謂定理。

在数学的定理与証明中出現的語詞和符号，可以分为常項与变項。

例如在算术中，我們常碰到这样的語詞，如“数”，“零”(“0”)，“一”(“1”)，“加”(“+”)，…。① 这些語詞都是常項。它們都有确定的意义，而且在运用它們的过程中，它們的意义一直不变。

在算术中，我們习惯于将单个的英文的小写字母“a”，“b”，“c”，…，“x”，“y”，“z”用作变項。同常項相反，变項本身都是沒有

---

① “算术”这个詞，我們是用来表示数学中研究数的一般性质、数与数間的关系与数的运算的那个部分。特別是中学所讲的数学中，“算术”也常常叫做“代数”。我們在这里所以要用“算术”这个語詞，是因为在高等数学中，“代数”是用来表示关于代数方程式的理論的。(在这些年来“代数”这語詞又用成一个更寬的意义。它仍然是与“算术”的意义不同。)“数”这一語詞在这里总是用来表示数学中的实数，这就是說，数是包括正整数、分数、有理数、无理数、正数与負数，但却不包括虛数或复数。

意义的。对于下面的問題：

零是否有某一种性质？

例如： 零是一正整数嗎？

我們是可以給以肯定的或否定的回答的。我們所給的答案可以对，也可以錯。但是，无論如何，这些問題是有意义的。但是，相反的，下面关于 x 的問題：

x 是一正整数嗎？

便是一无意义的問題，我們也不能給一有意义的回答。

在有些初等数学的教科书中，特别是較老的初等数学的教科书中，我們有时碰到一些表述，好像我們可以給这些变項以独立的意义似的。因此，就有人說："x"，"y"，…这些符号，也指示某些数或量；"x"，"y"，…虽然不是指示"常数"（"constant numbers"）（常数是由常項如"0"，"1"所指示的），但是它們却指示那些所謂"变数"（"variable numbers"）或"变量"（"variable quantities"）。这种說法是出于一种极大的誤解。"变数" x 不可能有任何确定的性质。例如，它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說，x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以是負数，有时又可以等于零。这样一种东西，在我們的現实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于現实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的㊀。因此，将符号区分为常項与变項，并不表示在数方面也可以区分为常数与变数。

§2. 包含变項的表达式——語句函項与指示函項

由于变項本身是沒有意义的，所以，像

x 是一正整数

这样的一句話，也就不是語句，虽然它們具有語句的文法形式。它們幷沒有表示一个确定的断定。因之，我們既不能肯定它們，也不能否定它們。我們用一个表示一个确定的数的常項来代換

x 是一正整数

中的“x”，只有这时，我們才能得到一个語句。例如我們用符号“1”去代換“x”，結果得到一眞語句；若用“$\frac{1}{2}$”去代換“x”，結果得到一假語句。这样的一个表达式，在这个表达式中包含有变項，同时如果用常項去代換这些变項，这个表达式便变成了一个語句——这样的一个表达式，我們将它叫做一个語句函項。这里順便提到一下，数学家是不很喜欢用“語句函項”这个名詞的，因为他們把“函項”这詞用作另一个意义。他們較多地将“条件”(condition)这一語詞，用成我們所說的“函項”的意义。完全由数学符号(而不由日常語言中的語詞)所构成的語句函項与語句，例如，

$$x+y=5,$$

数学家常常叫它做公式。在不会引起誤解的地方，我們有时将“語句函項”簡单地就叫做“語句”。

在一个語句函項中的变項的作用，可以很恰当地比做填空白題目中的那些括弧所形成的空白。正如只有当空白被我們填上以后，題目才得到一个确定的內容一样，一个語句函項只有当变項都被常項所代換以后，才变成一个語句。在一个語句函項中，用常項去代換变項——相同的变項用相同的常項去代換——其結果可以得出一个眞語句；在这种情形下，我們就說，常項所表示的事物滿足这个特定的語句函項。例如 1, 2 与 $2\frac{1}{2}$ 这几个数滿足下面这个語句函項：

$$x<3,$$

但是，3, 4 与 $4\frac{1}{2}$ 这些数就不滿足这个語句函項。

除了語句函項，还有別的包含变項的表达式值得我們注意，那就是指示函項或摹狀函項。一个指示函項或摹狀函項是这样的表达式，如果将它所包含的变項换为常項，那么，它就变成一个指示詞或摹狀詞，例如表达式：

$$2x+1$$

便是一个指示函項，因为，如果用一个任意的数値常項（即是說，表示一个数的常項，如“2”）去代換变項“x”，我們便得一指示詞（或摹狀詞），此指示詞表示一个数（如 5）。

在算术中所見的指示函項中，包括了所有的所謂代数式，这些代数式是由变項、数値常項与四种基本算术运算的符号所构成的，例如：

$$x-y, \qquad \frac{x+1}{y+2}, \qquad 2(x+y-z)。$$

但是，另一方面，代数方程式，即是用“＝”将两个代数式联起来而成的公式，却是語句函項。在数学中，关于方程式有一套习用的术語。在方程式中出現的变項，叫做未知数。那些能滿足这方程式的数，叫做这方程式的根。例如，在方程式：

$$x^2+6=5x$$

中，变項“x”是未知数，而数 2，3 是这方程式的根。

关于用于算术中的变項“x”，“y”，…，我們說它們代表那些表示数的指示詞，或者說，数是这些变項的値。这話的大意是說：如果用表示数的常項（而不是用表示数的运算的表达式，或表示数与数之間的关系的表达式，或在算术范圍之外的几何图形、动物、植物等等）㊀ 去代換一个包含“x”，“y”…这些符号的語句函項中的这些符号，那么，这个語句函項就变成語句。同样的，用于几何中的变項，是代表那些表示点与几何图形的指示詞。在算术中，我們

所碰見的指示函項，也可以說是代表关于数的指示詞。有时，我們簡单地說："x"，"y"…这些符号，或由这些符号所构成的指示函項，是表示数或是数的指示詞。但是，这只是一种省略的說法㊂。

§3. 应用变項形成語句——全称語句与存在語句

除了用常項去代换变項以外，还有一个方法，可以使我們由一个語句函項得到一个語句。让我們来研究下列公式：

$$x+y=y+x$$

这是一个包含两个变項"x"，"y"的語句函項，任何两个任意数都可以滿足这个方程式。如果我們用任何两个数值常項去代换"x"、"y"，我們总是得到一个真的公式。我們用下面这句簡单的話表示上面所說的情形：

对于任何数 x 与 y，　$x+y=y+x$。

这已經不是一个語句函項，而是一个語句了，而且还是一个真語句了；它是算术中最基本的定律之一，即所謂加法的交换律。数学中的那些最重要的定理都同样是这样表示的，即一切所謂全称語句，或所謂具有普遍性质的語句，这些語句断定某个范疇中的任意事物（例如，在算术这个范疇中，任意的数）都具有一种如此如此的性质。我們必須注意的是：在表示全称語句时，"对于任何事物（或数）x，y…"这样的短語常被省略掉，而是需要我們在思想中加进去的。例如，算术的加法交换律，便只表示为下面的簡单形式：

$$x+y=y+x$$

这种省略的形式，已成了大家的习慣用法，我們在以后的討論中，一般地也要采取这种用法。

让我們研究下面这个語句函項：

$$x>y+1$$

幷不是任何两个数都能滿足这个公式。例如，假設我們用“3”代換“x”，用“4”代換“y”，我們便得到

$$3>4+1$$

这是一个假語句。因此，如果有人說：

对于任何数 x 与 y，　$x>y+1$，

那么，虽然他說了一个假語句，然而却无疑是一个有意义的語句。但是，另一方面，也有許多对的数滿足上面这个語句函項。例如，如果以“4”与“2”分别掉換“x”与“y”，便得到

$$4>2+1$$

这个眞的公式。

上述这种情形——某些两个数能滿足 $x>y+1$ 这个公式——，可以簡单地表示如下：

有数 x 与 y，　$x>y+1$

或者用一更常采用的形式：

有数 x 与 y，使得 $x>y+1$。

上面这些表达式都是眞語句，它們就是存在語句或具有存在性质的語句的例子。这种語句表示具有某某种性质的事物(如数)的存在。

应用上述方法，我們可以从任何語句函項得出語句，但是，所得出的語句是眞或是假，却要根据这語句函項的内容来决定。現在用下面的例子作进一步的說明。

$$x=x+1$$

这个公式是任何数都不能滿足的。因而，不論我們在它前面加上“对于任一数 x”，或加上“有一数 x”，結果所得出的語句，总是假的。

和全称語句与存在語句相对，我們将不包含任何变項的語句，例如，

$$3+2=2+3$$

叫做**单称語句**。我們将語句分为三类——全称語句、存在語句与单称語句——这个分类并不已經穷尽一切可能，因为有很多語句不能分屬于上面三类中的任何一类。例如，像这样的語句：

对于任何数 x 与 y，有一个数 z，使得

$$x=y+z$$ [24]

这样的語句，我們叫它做**条件的存在語句**（以区别于前面所讲的存在語句。前面所讲的存在語句，也可以叫做**絕对的存在語句**）。这样的語句断定有具有某性质的数的存在，但是却根据于一个条件，即：有别的数(x, y)的存在。

§4. 全称量詞与存在量詞；自由变項与約束变項

下列这些短語：

对于任何 $x, y, \cdots$

与

有 $x, y, \cdots$，使得

都叫做**量詞**。前者叫做**全称量詞**，后者叫做**存在量詞**。量詞也可以了解为**运算子**。但是，有些作为运算子的表达式，却不是量詞。在前一节我們已經試图說明两种量詞的意义。为了表明它們的重要意义，应当着重指出：只有明显地或隐含地应用运算子，才能使一个包含有变項的表达式变为一个語句，那就是說，变为一个确定的命題。在数学定理的表述中，如果沒有相应的运算子，变項的应用是不可能的[25]。

在日常語言中，虽然可以用变项，但是，我們却不习慣于用变項。由于同一的理由，在日常語言中也不用量詞。然而在日常語言中，也有一些語詞，这些語詞在一般用法上与量詞有很密切的联系，例如，“每一”、“所有”、“某一”、“某些”。如果我們注意到：

所有的人都是会死的

或 有些人是聪明的

这两个日常語言中的語句分别地与下面这两个用量詞的語句：

对于任何 x，如果 x 是人，那么 x 是会死的

与

有一 x，使得 x 既是人又是聪明的

具有差不多相同的意义，那末，日常語言中的“每一”、“所有”…这些語詞与量詞之間的联系，就很容易看出了。

为了簡便起見，量詞常用一些符号来代替。

我們用

$$\underset{x,\,y,\cdots}{\mathbf{A}}$$

来代替

对于任何事物(或数) $x, y, \cdots$。

我們用

$$\underset{x,\,y,\cdots}{\mathbf{E}}$$

来代替

有事物(或数) $x, y, \cdots$，使得：

按照这規定，例如，前一节末我們所举的那个条件的存在語句，就可以用下面的形式来表示：

(I) $$\underset{x,y}{\mathbf{A}}\left[\underset{z}{\mathbf{E}}(x=y+z)\right]$$

(用 "$\underset{x,y}{\mathbf{A}}$" 代替"对于任何数 x, y", 用 "$\underset{z}{\mathbf{E}}$" 代替"有一数 z", 并将在量詞后的語句函項放在括弧內。)

如果我們在一个包含变項"x","y","z"…的語句函項前面,加上一个或几个运算子,而这一个或几个运算子,又包含了所有这些变項,那么,这个語句函項便自动地变成了一个語句。但是,如果在这一个或几个运算子中,沒有包含所有的变項,那么,这个語句函項,还仍然是一个語句函項,而沒有变成一个語句。例如,将下面

对于任何数 x、y、z,

有数 x、y、z,使得,

对于任何数 x 与 y,有一数 z,使得,

以及等等这样的短語中的任一个短語加在

$$x=y+z$$

的前面,那么,就得到一个語句了。但是,如果我們在 $x=y+z$ 前面仅仅加上:

有一数 z, 使得: 或 $\underset{z}{\mathbf{E}}$

那么,我們还并不能得到一語句;而我們所得出的那个表达式,即:

(II) $$\underset{z}{\mathbf{E}}(x=y+z)$$

无疑是一个語句函項,

因为如果我們用两个常項去替換上面公式中的 x、y, 而 z 仍維持原样不动,或者,在上面公式前面加上

对于任何 x 与 y, 或 $\underset{x,y}{\mathbf{A}}$,

那么,上面那个公式就变成了一个語句。

由此,我們知道,在一个語句函項中所可能出現的变項,可以分别成两种。第一种变項——可以叫做自由变項或真变項——它在这个語句函項中的出現是肯定这个表达式是一个語句函項而不是一个語句的决定性因素。为了要使这个語句函項变成語句,就

必須将这些自由变項換为常項，或在这个語句函項前面，加上包含这些自由变項的运算子。其余的变項，叫做約束变項或假变項，約束变項在一个語句函項轉变为一个語句中是不变的。例如，在上面(II)那个語句函項中，“x”“y”是自由变項；“z”出現两次，是一个約束变項。又例如，上面的(I)却是一个語句，它包含的变項，都是約束变項。

*在某一語句函項中出現的变項，究竟是自由变項还是約束变項，这完全决定于这个語句函項的結构，即是說，完全决定于运算子的出現与出現的位置。这点由一个具体例子来看，最容易明白。让我們来研究下面这个語句函項：

(III) 对于任何数 x，如果 $x=0$ 或 $y\neq 0$，那么，有一个数 z，使得 $x=y\cdot z$。

在这个函項前面，有一个包含变項“x”的全称量詞，因此，在这个函項中出現了三次的“x”，在它出現的任何位置上，都是一个約束变項。第一次出現的“x”是在全称量詞内，而成为量詞的組成部分。第二、第三次出現的“x”，都是被量項約束着。“z”的情形也相类似。因为，虽然(III)的第一个量詞中沒有包含“z”这个变項，然而，我們可以找出一个語句函項，这个語句函項是(III)的一个組成部分，同时，前面又有一个包含“z”的存在量詞。即是：

(IV) 有一个数 z，使得 $x=y\cdot z$。

(IV)是(III)的一个部分，而“z”在(III)出現时，都出現在(IV)这个部分中。因为这个道理，我們說，“z”在(III)中的任何地方，都是作为一个約束变項出現。“z”在(III)中第一次出現，是在存在量詞中，是存在量詞的一个部分；“z”第二次出現，是被存在量詞約束着。

在(III)中还出現一个变項“y”，而(III)中却沒有包含“y”的量詞，因而，“y”在(III)中是作为一个自由变項出現两次。

量詞能約束变項(这就是說，量詞能将在它后面的語句函項中的自由变項变成約束变項)，构成量詞的一个最本质的性质。我們知道，有許多别的表达式也有与量詞同样的性质。它們中的某一些，我們将在 §20 与 §22 中讲到；其它一些，例如复分符号，在高等数学中起着重要的作用。“运算子”是一个一般的名詞，用来表示一切具有这类性质的表达式。*

§5. 变項在数学中的重要性

由 §3 里我們已知道，变項在表示数学定理方面是起着重要的作用。然而，并不因此就可得出：不用变項在原則上便不可能表示数学定理。但是，在实际的数学工作中，不用变項，就很难做到。因为，如果不用变項，就是比較简单的語句，都得用一个复杂而难懂的形式。我們用下面这个算术定理来作說明：

对于任何数 x 与 y， $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$

这个数学定理，如果不用变項，便只得这样說：

任何两数的三次冪的差，等于此两数之差乘下列三項之和：(1)第一数的二次冪，(2)第一第二数之和，(3)第二数之二次冪。

从思維經济的观点来看，在数学的证明方面，变項更是重要㊅。讀者如果尝試一下，将本书以后所讲到的任何证明中的变項去掉，他便会相信我的話了。还必須指出，在本书下文中所可能遇到的证明，比高等数学各个領域中的一般证明，要簡单得多。要想作出高等数学中的证明而不借助于变項，将会遭遇非常大的困难。还应当指出：由于变項的引用，我們才发展了一种如方程式方法这样非常有效的解决数学問題的方法。可以毫不夸大地說，变項的发明，是数学史上的一个轉捩点。由于用变項，人类获得了一个

工具，这个工具，为数学科学的巨大发展与其邏輯基础的巩固鋪平了道路。①

练　　习

1. 在下列表达式中，哪些是語句函項？哪些是指示函項？

(a) x 是能被 3 除尽的；

(b) 数 x 与 2 之和；

(c) y^2-z^2；

(d) $y^2=z^2$；

(e) $x+2<y+3$；

(f) $(x+3)-(y+5)$；

(g) x 与 z 的母亲；

(h) x 是 z 的母亲。

2. 从几何学的范圍內，举出几个語句函項与指示函項的例子。

3. 算术中只包含一个变項（但这个变項在一特定語句函項中可以出現于几个不同的地方）的語句函項，可以分成三类：(i) 任何数都滿足它的函項，(ii) 任何数都不滿足它的函項，(iii) 有些数滿足它，但其他的数却不滿足它的函項。指出下面的語句函項屬于哪一类：

(a) $x+2=5+x$；

(b) $x^2=49$；

(c) $(y+2)\cdot(y-2)<y^2$；

① 在古代，希腊数学家与邏輯家就已經应用了变項，虽然只是在特殊的情况与很少的場合应用了它。在十七世紀初年，主要由于法国数学家維他的影响，人們才开始系統地、一致地应用变項，将变項应用到数学的研究上去。然而，直到十九世紀末年，由于量詞这个概念的引用，变項在科学語言方面，特别在数学理論的表述方面的功用，才被人們完全认識，这主要应归功于杰出的美国邏輯家与哲学家皮尔斯。

(d) $y+24>36$;

(e) $z=0$ 或 $z<0$ 或 $z>0$;

(f) $z+24>z+36$。

4. 从算术范圍内，举出关于全称定理、絕对的存在定理与条件的存在定理的例子。

5. 在語句函項

$$x>y$$

前面，加上包含“x”与“y”的量詞，便可以由此得出各种語句，如：

对于任何数 x 与 y, $x>y$;

对于任何数 x, 有一数 y, 使得：$x>y$;

有一数 y, 使得：对于任何数 x, $x>y$。

一共有六个可能情形，請一一表示出来，并指出它們中間哪些是眞的。

6. 像第 5 題一样，在語句函項

$$x+y^2>1$$

与

x 是 y 的父亲

前面，加上各种量詞，并指出哪些是眞的（假定后一語句函項中的“x”与“y”代表人名）。

7. 写出一个与下列語句有相同意义的日常語句，并且不包含量詞或变項：

对于任何 x, 如果 x 是狗，那么，x 有一个很好的嗅觉。

8. 用量詞与变項作出一个語句，这个語句与下一語句有相同的意义：

有些蛇是有毒的。

9. 在下列各表达式中，分别哪些是自由变項，哪些是約束变

項：

(a) x 是能被 y 除尽的；

(b) 对于任何 x，　$x-y=x+(-y)$；

(c) 如果 $x<y$，那么，有一数 z，使得：

$$x<y \text{ 与 } y<z;$$

(d) 对于任何数 y，如果 $y>0$，那么，有一数 z，使得：$x=y\cdot z$；

(e) 如果 $x=y^2$ 与 $y>0$，那么，对于任何数 z，$x>-z^2$；

(f) 如果有一数 y，使得 $x>y^2$，那么，对于任何数 z，$x>-z^2$。

再用 §4 里的符号代换上面表达式中的量詞。

*10. 如果将在 9 題 (e) 那个語句函項中两次出現的“z”换为“y”，我們便得到一个表达式，在这个表达式中的某个地位，“y”是作为自由变項出現，在另一个地位，“y”又作为約束变項出現。請指出“y”在哪个地位是自由变項，在哪个地位又是約束变項，理由为何？

(在一表达式中，同一个变項在有些地位上是約束变項，在另一些地位上又是自由变項，运算起来便感觉困难；有些邏輯家有見于此，便避免用这样的表达式，并且不将这种表达式看作語句函項。)

*11. 試作一个比較普遍的說明：在甚么条件下，一个变項在一給出的語句函項中的某一地位作为自由变項或約束变項而出現㊅。

12. 指出哪些数滿足下面的語句函項：

$$\text{有一数 } y,\ \text{使得 } x=y^2,$$

哪些数滿足下面的語句函項：

$$\text{有一数 } y,\ \text{使得 } x\cdot y=1。$$

(II) 論語句演算

§6. 邏輯常項;旧邏輯与新邏輯

每一門科学中所需要应用的常項，可以分为两种。第一种常項，就是某門科学所特有的語詞。例如，算术中指示个别的数、数的类、数与数間的关系或数的运算等等的那些語詞，都是屬于第一种常項。在§1中作为例子的那些常項，便是屬于第一种常項。另一方面，还有一些在絕大多数的算术語句中都出現的，具有非常普遍的性质的語詞，这些語詞我們无論在日常語言中以及在一切科学領域中都会遇到它們，它們是傳达人类思想与在任何領域中进行推論所不可缺少的工具，例如，“不”，“与”，“或”，“是”，“每一”，“有些”……;这些語詞都屬于第二种常項。于是，就有一門被认为是各門科学的基础的学問，即是邏輯。邏輯这門学問是要建立第二种語詞的确切意义，与关于这些語詞的最普遍的定律。

邏輯很早就发展成一門独立的科学，甚至于比算术和几何都要早。經过一个几乎是完全停滞的长时期，这門学問直到最近才开始一个巨大的发展;在这个发展过程中，它經历了一种彻底的轉变而成为一門具有与数学类似的性质的学問。这种轉变后的新邏輯，就是所謂**数理邏輯**，或**演繹邏輯**，或**符号邏輯**;有时我們也叫它做**邏輯斯蒂**[2] (logistic)。新邏輯在很多方面都超过旧邏輯，这不仅是由于新邏輯的基础的結实与所用的方法的完善，而且主要地是由于新邏輯所建立起来的丰富的概念与定理。基本上說，旧的傳統邏輯只是新邏輯中的一个片断部分，而且这个部分，从其他科学，特别是从数学方面的要求看，是完全不重要的。因此，由于本书的目的所在，在本书的整个篇幅中将很少有机会来討論傳統邏

輯方面的問題。①

§7. 語句演算；語句的否定，合取式与析取式

在具有邏輯性质的語詞中，有一小組重要的語詞，包括“不”、“而且”、“或”、“如果…，那么…”这样的語詞。在日常語言中，我們就很熟悉这些語詞，我們应用这些語詞从簡单語句构成复杂語句。在文法上，它們被归屬于所謂語句联詞。仅仅就这一个文法的性质說，这些語詞的出現并不体現出一門专門科学的特殊性质。建立这些語詞的意义与用法，是邏輯的一个最初步的，也是最基本的部分的工作——这个部分就是語句演算，有时也叫做命題演算，或不太恰当地，叫做演繹理論。②

現在我們要討論語句演算中的那些最重要的語詞的意义㉙。

借助于“不”这个字，我們可以形成任何語句的否定式。两个語句如果其中的一个語句是另一个語句的否定，这两个語句就叫做互相矛盾的語句。在語句演算中，“不”字是放在整个語句前面的，但在日常語言中，“不”字通常是放在动詞前面。在英文的日常

① 邏輯是紀元前四世紀希腊大思想家亚里士多德(Aristotle)創立的；亚里士多德的邏輯著作，都收集在《工具論》(Organon)一书中。但是，数理邏輯的創立人，应該被认为是十七世紀的德国哲学家与大数学家萊布尼兹。然而萊布尼兹的邏輯著作并沒有能对于邏輯研究的进一步发展产生影响，有一个时期萊布尼兹的邏輯著作甚至湮沒无聞。数理邏輯的继續发展，只是在十九世紀中叶，即英国数学家布尔的邏輯系統发表的时候才开始，他的主要著作是：《思想規律的研究》(An Investigation of the Laws of Thought, 1854 年倫敦初版)。到現在止，怀特海(A. N. Whitehead) 与罗素的划时代的著作《数学原理》(Principia Mathematica, 1910—1913 劍桥初版)仍是新邏輯学的最完善的表現。

② 历史上第一个語句演算系統，出現于德国邏輯家弗萊格 (G. Frege, 1848—1925)氏的著作：《概念符号系統》(Begriffsschrift)中。弗萊格无疑地是十九世紀最偉大的邏輯学家。当代杰出的波兰邏輯家与邏輯史家路加西維契(J. Lukasiewicz)，又成功地給予語句演算一个特别簡单、精确的形式，引起了对語句演算的广泛研究。

語言中，如果需要将“不”这个語詞放在一个語句的前面，就需要用“这并不是：”(it is not the case that)这个短語来代替“不”这个語詞。例如：

1 是一正整数。

这个語句的否定就是：

1 不是一正整数，

或

这并不是：1 是一正整数。

在任何时候，我們說出一个語句的否定，我們的意思是表示：这个語句是假的。如果这个語句事实上是假的，那么，这个語句的否定便是眞的；如果这語句事实上是眞的，那么，这語句的否定便是假的。

用“而且”这个詞将两个或两个以上的語句联合起来，結果便形成了一个合取式或邏輯积；被联合在合取式中的那些語句，叫做合取式的元素(member)，或叫做邏輯积的因子(factor)。例如：如果将下面两个語句

2 是一正整数

与

$$2<3$$

这样联合起来，便得出下面这个合取式：

2 是一正整数，而且 $2<3$。

断定两个語句所构成的合取式，就等于断定这两个語句都是眞的。如果事实上这两个語句都是眞的，那么，这个合取式便是眞的；但是，只要这两語句中至少有一个語句是假的，那么，这个合取式便是假的。

用“或”字将两个或两个以上的語句联合起来，便得出一个这些語句的析取式，后者也叫做邏輯和。构成析取式的那些語句，叫

做析取式的元素或叫做邏輯和的被加項(summand)。“或”字在日常語言中至少有两个不同的意义，一个是可兼的“或”，另一个不可兼的“或”。如果“或”字用成可兼的意义，那么，两个語句的析取式，只表示这两个語句中至少有一个語句眞，而对于这两个語句是否能同眞，沒有任何表示。如果“或”用成另一个意义，即用成不可兼的意义，那么，两个語句的析取式是断定：这两个語句中之一是眞的，而另一个是假的。假定我們在书店里看到一个通告：

教师或大学学生可以享受特别的减价优待。

这里“或”这个語詞无疑地是用成第一个意义，因为这个通告并不想表示：是教师同时又是大学学生的人不能享受减价优待。另一方面，如果一个小孩子要求上午带他去散步，下午带他去看戏，而我們这样答复他：

不，我們去散步或者我們去看戏。

这里的“或”这个語詞，很显然是用成第二个意义，因为我們只想答应他的两个請求中的一个。在邏輯与数学中，“或”这个語詞总是用成第一个意义，即是可兼的意义。因之一个两个語句的析取式，如果两个語句或至少其中一个語句是眞的，这个析取式就被认为是眞的。如果两个語句都是假的，那么，这个析取式才是假的。例如，虽然我們知道有些数既是正数又小于3，我們仍然可以断定：

每一个数都是正数或小于3。

为了避免誤解，在日常語言和在科学語言中一样，我們最好将“或”这个語詞用成第一个意义，而当我們想要表示第二个意义时，使用“或者…或者”这个方式，这样是会有許多便利的。

*即使我們将“或”这个語詞限制到可兼的意义，日常語言中的“或”的用法与邏輯中的“或”的用法还有很大的差別。在日常語言中，用“或”这个語詞联合起来的两个語句，总在形式上与內容上有

某种联系。("与"这个語詞的用法也是如此,不过程度較輕罢了。)这种联系的性质究竟如何,是并不很清楚的。对于这种联系要作一个詳細的分析与說明,将会碰到相当大的困难。无論如何,不熟悉現代邏輯語言的人,很难认为下面这样的語句

2·2=5 或紐約是一大城

是一个有意义的表达式,当然更不会认为它是一句眞語句。在日常的英文語言中,"或"字的用法是受了一些心理因素的影响的。在通常情形下,只有当我們相信在两語句中有一个是眞的,而不知道哪一个是眞的时候,我們才断定这两个語句的析取式。假如我們在正常的光綫之下看一片草地,我們就不会說:这片草地是綠色的或是藍色的。因为我們能够說一句更簡单也更确定的話,即是:这草地是綠色的。有时甚至我們认为:一个人如果說了一个析取式,这就表示这个人承认他不知道析取式中哪一个元素是眞的。假如我們后来发觉,这个人說那个析取式时明知道其中一个——特别是如果他明知道哪一个——元素是假的,那么,即使这个析取式中的其他元素是眞的,我們仍然会认为这个析取式是假的。让我們設想,我們問一个朋友:你甚么时候离开?他說:今天或者明天或者后天。假使我們以后发觉,他在說这句話时,就已經决定了要当天离开,我們大半会认为,他是故意欺弄我們,他說了一句謊話。

現代邏輯的創立者們在把"或"这个語詞引入他們的研究領域中时,(也許是不自觉地)要求簡化"或"的意义,使它变得更清楚些,并且独立于一切心理因素,尤其是独立于认識的存在或不存在。結果,他們便将"或"的用法放寬了,即使两个語句在形式上或內容上沒有联系,他們认为,这两个語句所构成的析取式还是一个有意义的整体。因此,近代邏輯家使一个析取式的眞假——和一个否定式或合取式的眞假一样——仅仅决定于这个析取式所包含

的元素的眞假。因此，我們如果从現代邏輯所給予"或"的意义来看，那末，下列表达式：

2·2=5 或紐約是一个大城市

就是一个有意义的語句而且是一个眞的語句，因为这个析取式的第二个元素确是眞的。同样，假如我們的朋友在答复他何时离开这个問題时，他所用的"或"字也是严格的邏輯意义下的"或"，那么，我們必須认为他的答复是眞的，不管我們对他的动机有如何想法。*

§8. 蘊函式或条件語句；实质蘊函

如果我們用"如果…，那么，"将两个語句联接起来，我們就得到一个复合語句，这个复合語句，就叫做一个蘊函式或条件語句。"如果"所引导的那个附屬子句，叫做前件 (antecedent)，"那末"所引导的那个主要子句，叫做后件 (consequent)。我們断定一个蘊函式时，我們就是断定：前件眞而后件假这样情况是沒有的。因之，在下列三个情形的任一情形下：

(1) 前件与后件都眞，

(2) 前件假而后件眞，

(3) 前件与后件都假，

一个蘊函式都是眞的。只有在第四个可能的情形下，即前件眞而后件假，整个的蘊函式才是假的。由此可以得出：如果一个人承认一个蘊函式是眞的，并且又承认这个蘊函式的前件是眞的，那么，他就必得承认这个蘊函式的后件是眞的；同时，如果一个人承认一个蘊函式是眞的，并且又否定这个蘊函式的后件，认为它是假的，那么，他就必得否定这个蘊函式的前件，认为它是假的。

*同析取式的情形一样，邏輯中的蘊函式的用法与日常語言中

的蘊函式的用法有相当大的差别。在日常語言中，只有当两个語句有某种形式与內容上的联系时，我們才用“如果…那么…”把这两个語句連接起来。我們很难一般地說明这究竟是一种什么联系，只在有些情形下，这种联系的性质才比較明显。这种联系常常和某种确信結合在一起，这个确信就是：后件必然可以由前件而推出，也就是說，如果我們假定前件是眞，我們就会不得不假定后件也是眞（甚至可能确信，我們可以根据某种普遍定律从前件中把后件推出来，虽然这个普遍定律我們不一定能明确地說得出来）。同样，在这里也表現出一个外加的心理的因素；通常的情形是：只有当我們对前件和后件是否眞沒有确切的认識时，我們才作出或断定一个蘊函式；否則，用一个蘊函式似乎就很不自然，并且会引起人怀疑到它的意义和眞实性。

下面的例子可以作为一个說明。让我們来考虑下面这个物理定律：

一切金屬都是有延展性的。

让我們用包含变項的蘊函式将这个定律表示如下：

如果 x 是金屬，那么，x 就是有延展性的。

我們如果相信这个普遍規律是眞的，我們也就相信这普遍定律的特殊例证也是眞的，即是說，也就相信，用表示任何物质如铁、粘土、木头的語詞去代換 x 而得出的蘊函式也是眞的。用铁、粘土、木头代換上面那个普遍規律中的 x，便得到下面的語句：

如果铁是金屬，那么，铁是有延展性的，

如果粘土是金屬，那么，粘土是有延展性的，

如果木头是金屬，那么，木头是有延展性的。

而事实上也的确是，这样代換所得的語句，都滿足了一个眞的蘊函式所要求的条件，即：沒有前件眞而后件假的情形。此外，我們还

可以注意到：这些語句中的前件与后件之間有一种密切的联系，这个联系的形式的表現就是前件的主詞与后件的主詞是同一的。并且我們还确信：如果假定这些蘊函式中的任何一个蘊函式的前件，例如，铁是金屬，是眞的，我們就可从这个前件推出它的后件，例如，铁是有延展性的，因为我們可以訴諸于这样一个普遍的規律即一切金屬都是有延展性的。

但是，虽然这样，上面所談的語句中有几个語句，从日常語言的观点看来，似乎是不自然并且可疑的。对于上面那个普遍的蘊函式，或对于用某些語詞，（这些語詞所表示的东西是金屬与否，或有延展性与否，我們根本不知道，）去代換那个普遍蘊函式中的"x"而得出的語句，我們不会觉得它不自然或可疑。但是，如果我們用"铁"去代換"x"，我們得出一个語句，它的前件与后件我們都知道是眞的；在这种情形下，我們就不会去用一个蘊函式，而喜欢用下面这个表达式：

因为铁是金屬，所以铁是有延展性的。

同样，如果用"粘土"去代換"x"，我們得出一个前件假而后件眞的蘊函式；在这种情形下，我們也不会去用一个蘊函式，而会說：

虽然粘土不是金屬，它却是有延展性的。

最后，如果我們用"木头"去代換"x"，結果得出一个前件与后件都假的蘊函式；在这种情形下，如果我們还想保持"如果…那么…"这个蘊函式的形式的話，我們就会要改变动詞的語气，說成：

如果木头竟是金屬，那么木头将該是有延展性的了。

但是，由于考虑到科学語言的种种要求，邏輯学家对于"如果…那么…"这个短語采取了和他們对"或"这个語詞所采取的同一态度。他們决定簡化并且明确"如果…那么…"的意义，并使"如果…那么…"摆脫种种心理的因素。为此，他們放寬了"如果…

那么…"的用法；即使一个蘊函式的前件与后件沒有任何联系，他們仍把这个蘊函式看作是一个有意义的語句；同时，他們使一个蘊函式的眞假完全决定于它的前件与后件的眞假。这种蘊函式，就是当代邏輯中所謂的实质蘊函（implication in material meaning 或 material implication)。实质蘊函不同于形式蘊函（implication in formal meaning 或 formal implication)；保证形式蘊函有意义与眞实的必要条件，是前件与后件之間有某种形式上的联系。形式蘊函这个概念并不十分淸楚；但是，无論如何，形式蘊函这个概念要比实质蘊函这个概念狹窄；也就是說，任何一个有意义的而且眞的形式蘊函必然同时是一个有意义的而且眞的实质蘊函，但是，任何一个有意义的而且眞的实质蘊函不必同时是一个有意义的而且眞的形式蘊函。

为了要說明上面的道理，我們現在来研究下列四个語句：

如果 2·2=4，那么，紐約是一大城市。

如果 2·2=5，那么，紐約是一大城市。

如果 2·2=4，那么，紐約是一小城市。

如果 2·2=5，那么，紐約是一小城市。

在日常語言中，这些語句很难被认为是有意义的，更不会认为是眞的語句。但是，另一方面，从数学与邏輯的观点看，这些語句却都是有意义的語句，并且除了第三句是假的以外，其余都是眞的語句。当然，我們这样說并不等于說上面这样一些語句从任何观点看有什么特别重要的意义，或我們会去用它們来作我們論证的前提。

把上面所說明的日常語言与邏輯語言之間的差別看作是絕对的，并且把上面所描述的我們在日常語言中应用“如果…那么…”时的种种常規看作絕无例外，这也是一种錯誤。事实上，日常語言中“如果…那么…”的用法是相当灵活的。如果我們仔細考查一

下，我們就会发現在許多情形下"如果…那么…"的用法，同我們上面所說的常規并不一致。让我們設想我們的一个朋友碰到一个非常困难的問題，而且我們相信，他决不能解决这个問題，于是，我們便会用开玩笑的口气說：

如果你解决了这个問題，我就吃掉我的帽子。

这句話的用意是很明显的。这里我們断定了一个蘊函式，它的后件无疑地是假的；因此，既然我們断定整个蘊函式为眞，我們也就同时断定前件是假。即是說，我們用这个蘊函式来表示一种确信：我們的朋友将不能解决他所面临的困难問題。很清楚，这里这个蘊函式的前件与后件并沒有任何联系。因之，这是一个实质蘊函的典型例子而不是一个形式蘊函。

关于"如果…那么…"在日常語言中与在数理邏輯中用法的差别，曾經引起冗长的甚至动情感的辯論。附带說一句，职业邏輯家在这个辯論中，却只表演了一个次要的角色[1]。(很奇怪，关于"或"的用法的分歧却比較很少为人注意。) 有人提出意見說，由于引用了实质蘊函，邏輯家得出了許多誖論，甚至得出了許多純粹的胡說。因此，就有一种改造邏輯的呼声，要求使邏輯与日常語言关于蘊函式的用法能有更大的接近。

我們很难认为上面这种对近代邏輯中的蘊函式的批評，有什么充分的根据。在日常語言中，沒有一个語詞是有严格确定的意

---

① 这是有趣的事情，关于蘊函的討論，在古代就已开始。希腊哲学家費罗(Philo of Megara，紀元前四世紀)在邏輯史上大概是第一个傳播了实质蘊函的用法的人。这个主張和他的老师克朗納斯(Diodorus Cronus)是对立的；克朗納斯主張把蘊函用成較狹的意义，后者与我們前面所讲的形式蘊函比較接近。稍后，到了紀元前第三世紀，——可能是受了費罗的影响，——希腊的斯多噶学派(Stoic School)的哲学家与邏輯家們又討論了許多种可能的关于蘊函的概念(在他們的著作中我們可以看到語句演算的最早开端)。

义的。很难找出两个人在完全相同的意义上用同一个語詞，即使在同一个人的語言中，在他生活的不同时期，一个語詞的意义也有所变化㊥。并且，在日常語言中，一个字的意义常常是非常复杂的；一个語詞的意义，不仅依据于这个語詞的外表形式，还依据于說这个語詞时的环境，有时甚至依据于主观的心理因素。如果一个科学家要引用一个日常語言中的概念到科学中去，并且要建立关于这个概念的普遍規律，他就必須使这个概念的內容更清楚、更确切、更簡单，使这个概念能去掉那些不相干的性质。邏輯家引用“如果…那么…”到邏輯中去，是这样的态度，物理学家引用“金屬”这个語詞到物理学中去，也是这样的态度。因此，不論一个科学家用什么方法来完成这个任务，为他所規定的語詞用法与日常語言中的用法，多少总会有些出入。如果一个科学家明确地表示他将一个語詞用成什么意义，同时，如果他又一貫地遵照他所决定的用法，那么，就沒有人能加以反对，說他的做法会导致无意义的結果。

然而，也有些邏輯家，注意到关于蘊函的爭論，于是进行修改蘊函的理論。一般地說，他們并不否认实质蘊函在邏輯学中的地位；而是竭力想在邏輯学中为另外一种蘊函的概念找寻一个地位；例如，他們竭力想建立这样一种蘊函式，即：从前件推出后件的可能性，乃是一个蘊函式之为眞的必要条件。甚至，他們要求把这个新概念放在首要的地位。这些尝試都还是較近的事情，目前要对它們作一个最后的評价，还嫌太早。① 但是，实质蘊函在簡便方面必定超过任何其他的蘊函理論，这一点在今天几乎已經成为定論。而且，我們必須記住：正是建筑在这个簡单的实质蘊函上面的邏輯学，已經证明是最复杂精細的数学推理的滿意的基础。*

① 第一个作这种尝試的人，是当代的美国哲学家与邏輯学家路易士（C. I. Lewis）。

§9. 蘊函式在数学中的应用

"如果…那么…"是在其他科学中，特别是在数学中被經常应用的邏輯表达式之一。数学定理，尤其是具普遍性质的数学定理，总是应用蘊函式的形式。在数学中，前件被称之为假設，后件被称之为結論。

作为一个具有蘊函形式的数学定理的簡单例子，我們可以举下面这个語句：

如果 x 是一个正数，那么，$2x$ 是一个正数。

在这个語句中，"x 是一正数"是假設，而"$2x$ 是一正数"是結論。

除了这个所謂数学定理的經典形式以外，在数学中，有时候也应用种种别的表示形式，不用"如果…那么…"而用其他方式将假設与結論联結起来。例如，上面那个数学定理就可以用下列这些另外的形式来表示：

由：x 是一个正数，推出：$2x$ 是一个正数；

x 是一个正数这个假設，蘊函一个結論或具有一个結論作为后件，即：$2x$ 是一个正数；

x 是一个正数这个条件，对于$2x$是一个正数說，是充分的；

对于 $2x$ 是一个正数說，x 是一个正数是充分的；

$2x$是一个正数这个条件，对于 x 是一个正数說，是必要的；

对于 x 是一个正数說，$2x$ 是一个整数是必要的。

因此常常我們不述說一个条件語句，而說：这个假設蘊函这个結論，或者說，这个假設，作为它的后件，具有这个結論，或者說，这个假設是这个結論的充分条件，或者說，这个結論从这个假設中推出，或者說，这个結論是这个假設的必要条件。对于上面的某些表达方式，邏輯学家也許会提出反对意見，但是，它們在数学中是被

普遍应用的。

*这些可能的反对意見所述及的是那些包含像“假設”、“結論”、“后件”、“推出”、“蘊函”等等任何这些語詞的表述。

要了解这些反对意見的要点，首先我們要注意到，上面那些表述与原来的那个表述在內容上是不相同的。在原来的表述中，我們所談到的只是数、数的性质、数的运算等等；因而，我們所談到的是数学所涉及的事物。但是，在上面那些表述中，我們却談到了假設、結論、条件，而假設、結論与条件却是关系到在数学中出現的語句或語句函項的。这里我們应当注意：指示一門科学所研究的事物的那些語詞，与指示一門科学中的各种表达式的那些語詞，是有区别的。但是，人們一般地都沒有将这二者分别清楚。在数学，尤其是在基本数学中，便可看到这种情形。很少人认識到这个事实，在初等代数的教科书里到处碰到的語詞，如“等式”、“不等式”、“多項式”或“代数分式”，严格說来，是不屬于数学或邏輯的范圍的，因为，这些語詞并不指示数学或邏輯所研究的事物：等式与不等式是一些特殊的語句函項，而多項式与代数分式——尤其是在基本数学教科书中——都是指示函項的特殊例子（参看 §2）。这种混乱的产生，是由于我們常常应用这一类語詞去表述数学定理。这已經成为非常普通的用法，也許我們无須去反对它，因为这并不会引起任何特殊的困难或錯誤。但是，我們却应当了解：相应于每一个应用这些語詞所表述的数学定理，我們都可以有另一个在邏輯上更正确的表述方式，在后者中根本不出現上面那些語詞。例如，相应于下面这个数学定理：

等式 $x^2+ax+b=0$，至多只有两个根

我們可以有下面这个更正确的表述方式：

最多有两个数 x，使得 $x^2+ax+b=0$。

現在，回到上面那些成問題的关于蘊函的表述方式，我們必須强調指出更为重要的一点。即：在这些表述中，我們断定：一个語句（即蘊函式的前件）以另一个語句（即蘊函式的后件）为它的結論，或者說，后一个語句从前一个語句推出。但是，当我們这样表示的时候，通常我們心里总有这样一个思想：假定第一个語句是眞，就必然要使我們肯定第二个語句是眞（并且很可能有这样一个思想，即我們甚至能从第一个語句中得出第二个語句）。但是，如在§8我們所已經知道的，在現代邏輯所規定的意义中，蘊函并不依据于前件与后件之間是否有那样一种联系。現代邏輯认为：

如果 $2\cdot2=4$，那么，紐約是一个大城市

是一个有意义的、甚至是一个眞的語句；对这一点感到惊異的人，必定会更难于接受

$2\cdot2=4$ 这个假設，具有一个結論，即，紐約是一个大城市

这样一个語句了。因此，我們看到，上面所举的那些表述（或变换）一个条件語句（即蘊函式）的方式，会引导出令人感到荒謬的說法，并从而更加深了日常語言与数理邏輯之間的距离。正是由于这个原因，因此上面那些表述方式不断地引起各种各样的誤解，而成为那些激烈的，往往是无結果的爭論的根源之一。

从純粹邏輯的观点看，很明显，我們能够避免这里所說的一切反对意見，只要我們明白确定地說明：我們用上面那些表述方式时，我們不考慮它們的日常意义，而只給予它們以現代邏輯中蘊函式所具有的那样的意义。但是，这样作，又会有另一方面的不方便；因为，在有些場合中——虽然不是在邏輯本身，但是在一个与邏輯密切相关的領域中，即在演繹科学的方法論中（参看第VI章）——我們要讲到語句以及語句与語句之間的推理关系。那时候我們要把“蘊函”、“推出”等詞用成一种不同的，比較更近似于日常語言的

意义。因此，最好还是根本避免应用上面那些表述方式，特别是因为我們拥有許多其他不会遭受反对的表述方式可以供我們应用⊕⊖。*

§10. 語句的等值式

现在我們来研究語句演算范圍中的另一个表达式。这个表达式就是"如果，而且仅仅如果"（或作："当且仅当"——譯者）。它在日常語言中比較地不常見。如果任何两个語句被这个表达式所联接起来，結果便得出一个复合語句。这个复合語句，就叫做等值式。等值式中的两个語句，分别地叫做等值式的左方与右方。当我們断定一个由两个語句构成的等值式时，我們的意思是要排除这种可能性，即：它們之中的一个眞而另一个假。因之，如果一个等值式中的左方与右方都是眞的，或都是假的，那么，这个等值式便是眞的，否則，这个等值式便是假的。

我們还可以用另一个方式来表述等值式的意义。在一个条件語句中，如果我們把前件与后件互相調换，我們得出一个新語句；这个新的語句，叫做原来那个語句的逆語句（或者說，是那个原語句的逆换式）。例如：

(I) 如果 x 是一个正数，那么，$2x$ 是一个正数

就是一个蘊函式或条件語句。把这个蘊函式当作原語句，它的逆語句就是：

(II) 如果 $2x$ 是正数，那么，x 是正数。

这个例子表明，原語句与它的逆語句恰巧都是眞的。但是，这并不是普遍的規律。这一点很容易理解，如果我們用"x^2"代换上例(I)和(II)中的"$2x$"，那么，代换之后，(I)仍然是眞的，而(II)却是假的。如果有这样的情形，即两个条件語句（其中一个是另一个的逆

語句)都是眞的，那么，我們可以用“当且仅当”联接这两个語句，以表示这两个語句同时是眞这一事实。因此，上面那两个蘊函式——原語句（I）和逆語句（II）——可以代换成下面这一个語句：

x 是一个正数，当且仅当 $2x$ 是一个正数

（在这个等值式中，左方与右方可以互相調换。）

此外，还有一些别的表述方式，也可以表示同样的意思，例如：

从：x 是一个正数，就推出：$2x$ 是一个正数，并反之亦然。

x 是一个正数这个条件与 $2x$ 是一个正数这个条件是互相等值的。

x 是一个正数这个条件，对于 $2x$ 是一个正数說，是一个既必要又充分的条件。

对于 x 是一个正数說，$2x$ 是一个正数是既必要而且充分的。

因此，不用“当且仅当”来联接两个語句，一般地我們还可以采用下列这样一些說法，即：在这两个語句之間有互相推論的关系；或者，这两个語句是等值的；或者，这两个語句中的任一个是另一个的必要而且充分的条件。

§11. 定义的表述方式与定义的規則

我們常常用“当且仅当”这个短語去下定义。也就是說，如果一个表达式在某門科学中第一次出現，而我們对这个表达式又不能直接有所了解时，我們就要作出一个約定，来确立这个表达式的意义：这就是所謂定义。例如，設想在算术中，符号“≦”尙未被应用过，而現在我們想要把它引用到算术中来（像通常那样，把“≦”看作是“小于或等于”的簡写）。为此，首先我們必須予“≦”以一个定义，也就是說，我們必須先利用一些已知的，已經具有明确意

义的表达式来說明"$\leqq$"的确切意义。为此，我們就給它下这样一个定义（假定"$>$"是一个已知的符号）：

我們說 $x \leqq y$，当且仅当不是 $x > y$。

这个定义表示，下面两个語句函項，即

$$x \leqq y$$

与

$$\text{不是 } x > y$$

是等值的。因此，我們可以說：这个定义使我們得以把公式 $x \leqq y$ 轉換为另一个等值的表达式，这个表达式不再包含 $x \leqq y$，而是完全由其他已經为我們所了解的詞項所构成的。同样如果我們用任何指示数的符号或表达式去代換"$x \leqq y$"中的"x"与"y"，对于所得出的任何公式来說情形都是一样。例如，用"3+2"代換"x"，用"5"代換"y"，結果得出的这个公式：

$$3+2 \leqq 5$$

和

$$\text{不是 } 3+2 > 5$$

这个語句是等值的；又，因为后一个語句是眞的，因此前一个也是眞。同样，如果用"4"代換"x"，用"2+1"代換"y"，結果得出下面这个公式：

$$4 \leqq 2+1$$

它和

$$\text{不是 } 4 > 2+1$$

这个語句是等值的，并且两者都是假的。这一点也适用于更复杂的語句和語句函項，例如，語句

如果 $x \leqq y$ 而且 $y \leqq z$，那么，$x \leqq z$。

可以轉变为

如果不是 $x>y$，而且，如果不是 $y>z$，那么不是 $x>z$。

总之，根据上面所下的那个定义，我們可以把任何包含“≦”的簡单或复杂語句，轉变成一个不包含“≦”的等值語句；换言之也可以説，就是把包含“≦”的語句翻譯到一种不包含“≦”的語言中去。并且正是这一点，它构成定义在数学中所起的作用。

为要使一个定义完善地完成它的任务，必須在下这个定义时注意一些应当事先注意的事項。为此，就确定了一些特殊的規則，这就是所謂**定义規則**，定义規則告訴我們如何作出一个正确的定义。这里我們不想詳尽确切地多談这些定义規則。我們只是指出：根据这些定义規則，每一个定义都可以具有等值式的形式，等值式的第一部分，叫做**被定义者**(definiendum)，第二部分，叫做**定义者**(definiens)。第一部分，即被定义者，总是一个簡短的，文法上比較簡单的語句函項，它包含那个要被定义的常項。第二部分，即定义者，是一个具有任意結构的語句函項，在它之中只包含那些或者它的意义是直接明白的，或者，它的意义是已經經过解釋的常項。有一点应該特别注意：那被定义的常項，或任何其他曾借助于这个常項去解釋的表达式，都不得在定义者中出現。如果它們在定义者中出現，这个定义便是不正确的，便犯了普通所謂**循环定义**的錯誤。(正如**循环証明**的錯誤一样；凡用一个論证去证明某一定理，而这个論证却是根据于这个定理，或根据于曾用这个定理去证明的其他定理的，这种情形叫做循环证明。)为了着重区分定义的約定的性质与其他具有等值式形式的語句之間的差别，最好，在定义之前我們加上“我們說”这样几个字。很容易看出，上面关于“≦”的那个定义是滿足了所有这些条件的。它的被定义者是：

$$x \leqq y$$

而它的定义者是：

不是 $x>y$

值得注意的是，数学家在下定义时，常常喜欢用"如果"或"在…情形下"，而不用"当且仅当"这个短語。例如，如果他們要給符号"≦"下一个定义，他們大概会采用这样的方式：

我們說 $x\leqq y$，如果不是 $x>y$。

这个定义看起来好像只是表示，被定义者从定义者推出，而沒有着重表示，定义者也可以从被定义者推出，因此似乎沒有表示被定义者与定义者是等值的。但是事实上，这是一种非正式的約定，即当我們用"如果"或"在…情形下"去联結被定义者与定义者时，这些語詞的意义就等于"当且仅当"所表示的意思。

此外，还有一点应当附加說明，就是等值式的形式，并不是定义所能采用的唯一形式⊕⊖。

§12. 語句演算的定律

我們已經討論过語句演算中一些最重要的表达式，現在我們就試着来說明語句演算的种种定律的性质。

让我們研究下列这个語句：

(I) 如果1是一个正数，而且 $1<2$，那么，1是一个正数。

这个語句很明显是眞的；这个語句仅仅包含屬于邏輯与算术領域的常項，但是，却从来沒有人会想到要把这个語句作为一个定理放到数学教科书里去。如果我們想一想，这是什么原因，我們会得出这样的結論：因为这个語句从数学的观点看是完全无意义的；它并不能在任何方面增加我們对于数的知識，这个語句的眞，根本不依靠于它所包含的那些数学語詞的內容；而只是根据于"与"，"如果"，"那么"这些語詞的意义。

为了明确这一点，让我們将这个語句中的

1 是一个正数

与　　1<2

换成屬于任意領域的任何其他語句；其結果是得出一系列的語句，其中每一个，都和原語句一样是眞的。例如，我們将“1 是一个正数”换成“某一图形是一个菱形”，将“1<2”换成“这个图形是一个长方形”，結果得出下面这个語句：

(II) 如果某一图形是一个菱形，而且，如果这个图形是一个长方形，那么，这个图形是一个菱形；

又，如果我們将“1 是一个正数”换成“今天是星期天”，将“1<2”换成“太阳在照耀着”，結果便得出下面这个語句：

(III) 如果今天是星期天，而且，如果太阳在照耀着，那么，今天是星期天。

为了用一种更普遍的方式来表示这一事实，我們将要引入变項“p”与“q”，并規定“p”与“q”这些符号在这里不是表示关于数或其他任何事物的指示詞，而是代表一个整个的語句。这一种变項，我們叫做**語句变項**。現在我們可以用“p”来代换“1 是正数”，用“q”来代换“1<2”，于是我們便得出一个語句函項：

如果 p 而且 q，那么，p。

这一个語句函項具有这样的一种特性，即：用任意語句去代换“p”、“q”，結果所得出的語句，总是眞語句。这一种性质，我們可以用一个普遍命題的形式来表述它：

对于任何 p 与 q，如果 p 而且 q，那么，p。

这里，我們得出了一个語句演算的定律，这个定律叫做**邏輯乘法的簡化定律**。上面 (I)(II)(III) 各个語句都只是这个普遍定律的特殊例子，正如公式：

$$2\cdot 3=3\cdot 2$$

只是下面这个普遍的数学定理

对于任意数 x 与 y, $x \cdot y = y \cdot x$

的特殊例子一样。

用同样的方式，我們还可以得出語句演算的其他定律。現在让我們举几个这样的普遍定律。在表述这些普遍定律时，按照§3所提出的那种习慣用法，我們将全称量詞“对于任何 p, q…”省掉了；在整个語句演算中，我們将貫彻这个用法。

如果 p，那么，p。

如果 p，那么，q 或 p。

如果 p 蘊函 q，而且 q 蘊函 p，那么 p，当且仅当 q。

如果 p 蘊函 q，而且 q 蘊函 r，那么，p 蘊函 r。

上面，第一个語句叫做**同一律**。第二个語句叫做**邏輯加法的簡化定律**。第四个語句叫做**假言三段論定律**。

正如带有普遍性质的算术定理是对于任意数的性质有所断言一样，語句演算的定律，可以說，是对于任意語句的性质有所断言。在这些定律中，只包含这样一些变項，这些变項所代表的是完全任意的語句，正是这一点构成語句演算的特点，并且使語句演算具有极大的普遍性和应用范圍。

§13. 語句演算的符号；眞値函項与眞値表

有一个簡单而且普遍的方法，叫做**眞值表**的方法(method of truth tables, or method of matrices)①，它可以使我們知道語句演算中的某一特殊的語句是否眞，并因此，可以使我們知道这一特殊語句是否可以算作語句演算的定律之一。

---

① 这个方法是皮尔斯所創始的。前面我們已提到他。(参看第12頁§5注①)

为了表述这个方法，我們最好应用一些特别的符号。我們将用符号

$$\sim; \quad \wedge; \quad \vee; \quad \rightarrow; \quad \leftrightarrow$$

分别去代替

"不"，"而且"，"或"，"如果…，那么…"，"当且仅当"。

第一个符号（即"～"），我們把它放在我們要否定的那个表达式的前面；其余的符号则都是放在两个表达式的中間。（因此"→"就占据"那么"这个詞的原来位置，并将"如果"去掉。）这样，应用这些符号，由一个或两个較簡单的表达式我們构成一个較复杂的表达式；而如果我們想用这个較复杂的表达式再构成更复杂的表达式，我們就便用一个括弧将这个原来的較复杂的表达式括起来。

应用变項、括弧以及上面列举的那些常項符号（有时还应用一些我們在这儿不拟討論的相似性质的常項），我們就可以写出語句演算范圍之中的一切語句与語句函項。除了单个的語句变項（如p，q，…）以外，最簡单的語句函項是下列这些表达式：

$$\sim p, \quad p\wedge q, \quad p\vee q, \quad p\rightarrow q, \quad p\leftrightarrow q$$

（以及其他許多只是变項的形式不同的表达式）。作为复合語句函項的一个例子，让我們研究下面这个語句：

$$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q),$$

这个复合的語句函項如果翻譯成普通語言，便是：

如果 p 或 q，那么，p 而且 q。

上面所讲到的假言三段論，就是一个更复杂的表达式。它現在換成下面这个形式：

$$[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)。$$

我們很容易可以明白，在語句演算中出現的任何語句函項，都

是一个所謂**眞值函項**。說一个語句函項是一个眞值函項，就是說：凡用語句去代換这个語句函項中的各变項而得出的任何語句，它的眞假完全依据于被代換进去的那些語句的眞假。这一点，就最簡单的語句函項，如“$\sim p$”，“$p\wedge q$”，等等而說，根据§7，§8，§10中所讲的“不”，“而且”等等这些詞的邏輯意义是可以立刻明白的。但是，这一点同样也适用于复合的語句函項。例如；我們来研究“$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge r)$”这个复合函項。用語句去代換其中的語句变項所得出的一个語句是一个蘊函式；并因此，这个蘊函式的眞假仅仅依据于它的前件与后件的眞假。它的前件，即一个由用語句去代換“$p\vee q$”中的变項而得出的析取式，这个前件的眞假唯一依据于那用来代換变項“p”与“q”的两个語句的眞假。同样，后件的眞假，唯一依据于那用来代換变項“p”与“r”的两个語句的眞假。因此，最后地說，从上述語句函項所得出的整个語句，它的眞假完全依据于用来代換变項“p”、“q”、“r”的那些語句的眞假。

为了明确认識：何以通过代換从一个特定的語句函項所得出的語句的眞假，依据于代換进去的那些語句的眞假，我們构造了一种所謂**眞值表**。

我們先举出語句函項“$\sim p$”的眞值表：

p	$\sim p$
T	F
F	T

下面，是其他的基本語句函項“$p\wedge q$”，“$p\vee q$”等等的联立眞值表：

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T

如果我們把这些表中的，“T”看作是“眞語句”的簡写，“F”看作是“假語句”的簡写。这些表的意义就立刻变得可以理解了。例如，在第二表中，在“p”、“q”、“$p \to q$”之下，第二横行中的字母分别地是“F”、“T”、“T”。由此，我們知道：如果我們用任何一个假語句去代换“$p \to q$”这个蘊函式中的“p”，用任何一个眞語句去代换这个蘊函式中的“q”，經过代换之后所得出的語句是眞的。显然，这同 §8 中所讲的是完全一致的。当然，上面表中的“p”、“q”可以改用任何其他变項。

上面这两个表，叫作**基本眞值表**。用这两个表我們可以列出任何复合語句函項的**导出眞值表**（derivative truth table）。例如，函項“$(p \vee q) \to (p \wedge r)$”的导出眞值表，就是下面这样：

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \to (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	T

为了解釋这个表的构造，让我們集中注意，譬如說，它的第五横行(綫以下的第五横行)。我們用眞語句去代换“p”与“q”，而用假語句去代换“r”。按照前面第二个基本表，“$p\vee q$”經过这样代换后所得出的語句是一眞語句，“$p\wedge r$”經过这样代换后所得出的語句是一假語句。而整个的函項“$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge r)$”，經过这样代换后，便得出一个蘊函式，其中前件是眞的，而后件是假的；因此，再应用第二个基本表(我們将第二个基本表中的“p”与“q”暫时看作“$p\vee q$”与“$p\wedge r$”)，我們就可作出結論：这个蘊函式是一个假語句。

在上表中直綫左边的“T”与“F”有八个横行。每一个横行表示一集可能的代换。当我們划一个函項的眞值表时，应該注意将各个可能的代换集都划出来，而不要遺漏。很容易看出，如果一个語句函項中有一个变項，那么，可能的代换集就有 2^1 个，即是二个；如果有两个变項，可能的代换集就有 2^2 个，即四个；如果有三个变項，可能的代换集就有 2^3 个，即八个；余可类推。

上表的直綫右边，有三个直行。我們需要研究的那个函項常常包含着几个函項，例如，在“$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge r)$”这个函項中，就又包含了两个函項，即“$p\vee q$”与“$p\wedge r$”。直綫右边的直行的数目，等于我們要研究的那个函項中所包含的函項的数目，再加上那个所要研究的函項本身之和。

現在，我們就有可能来說明如何决定在語句演算中一个語句的眞假。我們知道，在語句演算中，語句和語句函項是沒有外形的区别的。唯一的区别只在于：凡是被当作为語句的表达式，我們就在思想中在这个表达式之前加上一个全称量詞。为了要认識某个特定的語句是否眞，暫时，我們可以将它当作是一个語句函項，給它划一个眞值表。如果在眞值表的最后一个直行中，沒有“F”出

現，这就表示：由这个語句函項經过代換而得出的每一語句，都是眞的。这样，我們原来的那个(由我們在思想中給这个語句函項加上全称量詞而得出的)普遍語句便也是眞的。但是，只要在眞值表的最后一个直行中包含一个"F"，我們的那个語句便是假的。

因此，举例說，我們知道在"$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge r)$"的眞值表的最后一直行中，"F"出現了四次；因而，如果我們将"$(p\vee q)\rightarrow(p\wedge r)$"看作一个語句(即，如果我們在思想中在它前面給它加上"对于任何 p, q 与 r"这些字)，那么我們就会得出一个假語句。另一方面，用眞值表的方法，我們很容易可以表明 §12 中所举的所有那些語句演算定律，如簡化律、同一律，以及其他定律等等，都是眞語句。例如，簡化定律

$$(p\wedge q)\rightarrow p,$$

它的眞值表是：

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$
T	T	T	T
F	T	F	T
T	F	F	T
F	F	F	T

这里我們再举出一些其他的重要的語句演算的定律，这些定律都可以用同样的方法确定它們是眞的：

(1) $\sim[p\wedge(\sim p)]$

(2) $p\vee(\sim p)$

(3) $(p\wedge p)\leftrightarrow p$

(4) $(p\vee p)\leftrightarrow p$

(5) $(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$

(6) $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$

(7) $[p\wedge(q\wedge r)]\leftrightarrow[(p\wedge q)\wedge r]$

(8) $[p\vee(q\vee r)]\leftrightarrow[(p\vee q)\vee r]$

上面的(1),叫做矛盾律,(2)叫做排中律。(3),(4)分别地是邏輯乘法的重言定律与邏輯加法的重言定律。(5),(6)是两个交換定律。(7),(8)是两个結合定律。很容易看出,如果我們企图用日常語言去表述上面的最后两个定律,它們的意义会变得如何晦澀难解。这就非常清楚地表明了邏輯符号,作为一个表达复杂思想的精确工具,它的价值所在。

*有些語句,它們之为眞,在应用眞値表方法以前,似乎是很难看得出来的。但是,一經应用眞値表,我們就认識到它們是眞的。我們可以举几个例:

$$p\rightarrow(q\rightarrow p)$$

$$(\sim p)\rightarrow(p\rightarrow q)$$

$$(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$$

这些語句的眞所以不够明显,主要原因是在于:它們都表現了蘊函的特别用法,这就是实质蘊函的用法,实质蘊函这种特别用法,正是近代邏輯的特点㈩㈢。

这些語句,如果我們用日常語言去翻譯它們,用"蘊函"、"推出"这些語詞去代换"→",其結果就会变得特别地荒謬难解,例如,如果我們把它們变成下面这样的形式:

如果 p 是眞的,那么,p 可从任何 q 中推出(换言之:一个眞語句可以从任何語句中推出);

如果 p 是假的,那么,p 蘊函任何 q(换言之:一个假語句蘊函任何語句);

对于任何 p 与 q,或者 p 蘊函 q,或者 q 蘊函 p(换言之:

在任何两个語句中，至少有一个蘊函另一个)。

以这样的方式来表述，这些語句，就成为是經常引起誤解与爭論的根源。这一点完全可以确证我們在 §9 末尾所表示的意見。*

§14. 語句演算定律在推理中的应用

在任何科学領域中，几乎所有的推理都是明显或不明显地根据于語句演算定律的。我們現在試图用一个例子来說明这种情况。

給定一个具有蘊函式的語句，我們就能，除了得出(在 §10 中曾經讲过的)它的逆語句以外，还能得出两个另外的語句，即，反語句(或原給定語句的反語句〔inverse sentence〕)与逆反語句(contra-positive sentence)。将原給定語句的前件与后件分别地换成它們的否定式，就得出这个原給定語句的反語句。将反語句的前件与后件互相調換，就得出这个語句的逆反語句。因此，逆反語句，就是反語句的逆語句，同时，也是逆語句的反語句。逆語句、反語句、逆反語句以及原来的語句，这些合起来就叫作共軛語句(conjugate sentences)。作为說明，我們可以研究下面这个条件語句：

(I) 如果 x 是一个正数，那么，$2x$ 是一个正数。

从这个語句，就可作出下面三个共軛語句：

如果 $2x$ 是一个正数，那么，x 是一个正数。

如果 x 不是一个正数，那么，$2x$ 不是一个正数。

如果 $2x$ 不是一个正数，那么，x 不是一个正数。

就这个特殊的例子說，所有这些共軛語句同样都是真的。但是，这并不是普遍的情形。有时虽然原来的語句是真的，但是很可能不但它的逆語句(如 §10 中已經談过)可能是假的，并且它的反語句也可以是假的；这一点，我們只要用“x^2”代换上面这些語句中的

"$2x$"，就可以立刻明白了。

这样，我們就知道，从一个蘊函式的眞，不能推出它的逆語句或反語句也眞。但是，对于另一个共軛語句，即逆反語句，情形就不同了。在任何时候，只要一个蘊函式是眞的，它的逆反語句也是眞的。这一点可以用无数的例子来证明，并且是一条語句演算的普遍定律，即所謂易位定律或逆反定律。

为了要准确地表述这个定律，我們可以注意到，每一个蘊函式都可以表示为下面这个标准形式：

如果 p，那么，q。

它的逆語句、反語句与逆反語句就是下面这些形式：

如果 q，那么，p。

如果不 p，那么，就不 q。

如果不 q，那么，就不 p。

因此，易位定律，它表示任何一个条件語句都蘊函它的逆反語句，可以表述如下：

如果：如果 p，那么，q；那么：如果不 q，那么，不 p。

为了要避免"如果"和"那么"太多，我們可以把它稍作修改，表述如下：

（II） 从：如果 p，那么，q，可推出：如果不 q，那么，不 p。

现在我們要說明，如何借助于这个定律，我們可以从一个具有蘊函式的語句[例如从語句(I)]推出它的逆反語句。

上面(II)这个語句适用于任意語句"p"与"q"，因而，如果用

x 是一个正数

与

$2x$ 是一个正数

去分別代换"p"与"q"，(II) 这个語句仍然是眞的。为了行文的方

便，我們将“不”字的位置改动一下，得出下面这个語句：

(III)　从：如果 x 是一个正数，那么，$2x$ 是一个正数，可推出：如果 $2x$ 不是一个正数，那么，x 不是一个正数。

現在我們比較一下(I)与(III)这两个語句。(III)是一个蘊函式，而(I)是(III)这个蘊函式的假設。由于整个蘊函式和这个蘊函式的假設都被确认为是眞的，所以，这个蘊函式的結論同样也被确认为是眞的；但是蘊函式的結論，即：

(IV)　如果 $2x$ 不是一个正数，那么，x 不是正数。

恰是語句(I)的逆反語句。

这样，一个人了解了逆反定律，如果他以前已經证明某一个語句为眞，就可以认識到这个語句的逆反語句也是眞的。此外，我們很容易看到：反語句就是逆語句的逆反語句（即是說，将逆語句的前件与后件都換成否定式，再互相調換，便得出反語句）；因此，根据这个理由，如果一个語句的逆語句被证明为眞，那么，反語句同样也就可以被认定为眞。因此，如果我們能证明两个語句，即原来的語句与它的逆語句，那么，其他的共軛語句就用不着证明了。

这里可以提到一下，逆反定律还有許多变形。其中一个，就是(II)的逆語句：

从：如果不 q，那么，不 p，可推出：如果 p，那么，q。

这个定律，使我們可以从逆反語句推出原来的語句，并从逆語句推出反語句。

§15.　推論的規則，完全的证明

在上节中，我們证明了(IV)这个語句，現在，我們要比較更仔細地来研究一下这个证明的步驟本身。除了我們在上面已經讲过的定义的規則以外，我們还有其他一些性质类似的規則，即推理的

規則，或者說，証明的規則。这些規則，不应誤解为是邏輯定律，它們只是一些指示（directions），告訴我們已知为眞的語句如何可以經过轉变而产生新的眞語句。在上章所作的证明中，已經用到了两个证明的規則，即：代入規則（rules of substitution）与分离規則。分离規則一般也称作承认前件的推理規則（modus ponens rule）。

代入規則的內容是这样：如果一个被接受为眞的全称語句包含了語句变項，如果这些变項被別的語句变項或語句函項或語句所代換——一貫地用相同的表达式代換相同的变項——那么，这样代換后所得出的語句，也应該被接受为眞。正是应用这一条規則，在上一章中我們由(II)得出(III)。应当着重指出，代入規則也可以应用于別种变項，例如，应用于指示数的“x”，“y”，…等等这些变項。对于这些变項而說，我們可以用任何表示数的表达式去代換它們。

*上面所作的这个对于代入規則的表述，是不十分精确的。代入規則应用于这样的語句，这些語句由一个全称量詞与一个語句函項所构成，在这个語句函項中包含有被全称量詞所約束的变項。当我們应用代入規則时，我們便将量詞省略掉，而用其他的变項或表达式去代換以前为这个量詞所約束的那些变項（即是說，用語句函項或語句去代換变項“p”，“q”，“r”，…，用指示数的表达式去代換变項“x”，“y”，“z”，…）；在这个語句函項中出現的任何其他被約束的变項，則仍是保留不变；必須注意的是：在用以代換的那些表达式中，不能出現与那些保留不变的变項形式相同的变項。必要时，可以在这样代換后所得出的表达式之前，加上一个全称量詞，以便使这个表达式变成一个語句。例如，应用代入規則于下面这个語句：

对于任何数 x，有一个数 y，使得 $x+y=5$，

可以得出下面这个語句：

有一个数 y，使得 $3+y=5$，

但是也可以得出下面这个語句：

对于任何数 z，有一个数 y，使得 $z^2+y=5$。

这样，在上面这两个例子中，我們只代換了“x”，而“y”仍保留不变。但是必須注意，我們在用一个表达式去代換“x”时，这个表达式中不可以包含“y”。因为，如果这样，便会得出一个假語句，尽管原来的那个語句是真的。例如，用“$3-y$”去代換“x”，便得出：

有一个数 y，使得 $(3-y)+y=5$。*⊕⊞

分离規則是：如果有两个語句被认为是真的，其中一个是蘊函式，而另一个是这个蘊函式的前件，那么，作为蘊函式的后件的那个語句，也应該被认为是真的。（因此，我們說，就好像是我們使前件从整个蘊函式中“分离”出来。）应用这个規則，我們就在上节中从(III)与(I)中推出(IV)。

由此可以看出，在上节所作的語句(IV)的证明中，证明的每一步驟都在于应用一条推理規則到某些語句上去，这些語句是我們前此已經接受为真的語句。这样的一个证明，就叫作一个**完全的**证明。更准确一点，我們可以这样来表述一个完全的证明的性质：一个完全的证明，就是一个由具有下列性质的語句所构成的联鎖，联鎖开始的那些語句，是一些以前已被接受为真的語句；以后的每一个語句，都是可以根据一条推理規則由在先的語句中得出的語句，而联鎖的最后一个語句，則就是我們所要证明的那个語句。

我們可以注意到，由于对邏輯定律与推理規則的认識与应用，所有的数学推理，都采取了一个——从心理学的观点看——极端

簡单的形式。复杂的心理过程，都完全可以还原为这样一些簡单的活动，如：对以前已被接受为眞的語句的留心观察，对語句与語句之間純粹外形結构方面的关系的知觉，以及根据推理規則的机械的轉換等。很明显，由于这样一个方法，在证明中产生錯誤的可能性就減少到了最低程度[15]。

练　习

1. 从算术与几何的領域中，举出一些純粹屬于数学的表达式。

2. 在下列两个語句中，区别哪些表达式是純粹屬于数学的表达式，哪些表达式是屬于邏輯范圍的表达式：

(a) 对于任何数 x 与 y，如果 $x>0$ 而且 $y<0$，那么，有一个数 z，使得 $z<0$ 而且 $x=y\cdot z$；

(b) 对于任何两点 A 与 B，有一个点 C，C 在 A 与 B 之間，而且 C 到 A 的距离等于 C 到 B 的距离。

3. 用下列两个語句函項的否定式作成一合取式：

$$x<3$$

与

$$x>3。$$

甚么数能适合这个合取式？

4. "或"有两个意义，指出下列各个語句中的"或"是甚么意义：

(a) 在他面前有两条路：或者卖国，或者死；

(b) 假如我賺了很多錢或賽馬获胜，我就要作一次远距离旅行。

讀者試自己再举几个关于"或"的例子。

*5. [16] 研究下列的条件語句：

(a) 如果今天是星期一，那么，明天是星期二；

(b) 如果今天是星期一，那么，明天是星期六；

(c) 如果今天是星期一，那么，十二月二十五日是圣誕节；

(d) 假如願望能变成馬，乞丐也有馬騎；

(e) 如果一数能被 2 与 6 除尽，那么，这个数将能被 12 除尽；

(f) 如果 18 能被 3 与 4 除尽，那么，18 能被 6 除尽。

从数学邏輯的观点看，上面这些蘊函式中哪个是眞？哪个是假？从日常語言的观点看，上面那些蘊函式中，哪些会发生有无意义的問題与眞假的問題？特别注意語句(b)，(b)的眞假要看(b)是在一星期中的那一天說的；研究一下这个問題。

6. 用通常条件語句的形式表示下列諸定理：

(a) 为使一个三角形是一个等边三角形，这个三角形的三角相等是充分的条件。

(b) x 能被 3 除尽这个条件，对于 x 能被 6 除尽是必要的。

試再用另外的办法表示上面这两个条件語句。

7. 条件： $x \cdot y > 4$ 是

$$x > 2 \text{ 与 } y > 2$$

的正确性的必要的或充分的条件嗎？

8. ⊕㊉ 給出下列語句的选言的公式：

(a) x 被 10 除尽，当且仅当 x 旣被 2 除尽又被 5 除尽。

(b) 为了使一个四边形是一平行四边形，两条对角綫的交点是这两条对角綫的中点，是旣必要的而且充分的。

試从算术与几何領域中，再举出一些具有等值式形式的定理，作为例子。

9. 在下列語句中，哪些是眞的？

(a) 一个三角形是三等边的，当且仅当这个三角形的三边之高是相等的。

(b) 为使得 x^2 是一个正数，$x \neq 0$ 是必要的而且充分的。

(c) 一个四边形是正方形，蘊函这个四边形的四角都是直角。反之亦然。

(d) 为使 x 能被 8 除尽，x 能被 4 除尽而且能被 2 除尽是必要的而且充分的。

10. 假定我們已經知道語詞“自然数”与“积”(或“商”)的意义，讀者試为語詞“能被除尽”(divisible)下一个定义，并且采用下列等值式的形式：

我們說 x 是可用 y 除尽的，当且仅当…。

用同样形式給語詞“平行”下一个定义；为此我們要(在几何学范圍內)假設些什么語詞？

11. ⊕⊗ 将下列各符号表达式翻譯成日常語言：

(a) $[(\sim p)\rightarrow p]\rightarrow p$,

(b) $[(\sim p)\vee q]\leftrightarrow(p\rightarrow q)$,

(c) $[\sim(p\vee q)]\leftrightarrow(p\rightarrow q)$,

(d) $(\sim p)\vee[q\leftrightarrow(p\rightarrow q)]$。

讀者应特别注意，在日常語言中分别最后三个表达式的困难。

12. 用邏輯符号表示下列語句：

(a) 如果不 p 或不 q，那么，就不是 p 或 q。

(b) 如果 p 蘊函：q 蘊函 r；那么，p 而且 q 蘊函 r。

(c) 如果 r 可从 p 推出，而且如果 r 可从 q 推出，那么，r 可从 p 或 q 推出。

13. 給上面 11 題与 12 題中的所有語句函項，各划一眞值表。再，假定将这些語句函項都解釋成語句(这表示甚么意思?)，并决定它們中哪些是眞，哪些是假。

14. 試用眞值表的方法，确证下列語句是眞的：

(a) $[\sim(\sim p)]\leftrightarrow p$,

(b) $[\sim(p\wedge q)]\leftrightarrow[(\sim p)\vee(\sim q)]$,

$[\sim(p\vee q)]\leftrightarrow[(\sim p)\wedge(\sim q)]$;

(c) $[p\wedge(q\vee r)]\leftrightarrow[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$,

$[p\vee(q\wedge r)]\leftrightarrow[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]$。

語句(a)是**双重否定定律**，語句(b)是**摩根定律**[①]，語句(c)是**分配律**(对于加法的邏輯乘法与对于乘法的邏輯加法)。

15. 写出下列每一个語句的三个共軛語句(即逆語句、反語句、逆反語句)：

(a) x 是一个正数蘊函 $-x$ 是一个負数；

(b) 如果一个四边形是一个长方形，那么，可在它外边划一个外接圓。

在它們的共軛語句中，哪些是眞的？

試举出四个共軛語句全是假的这样的一个例子。

16. 根据函項"$p\leftrightarrow q$"的眞值表来解釋下列事实：在一个語句中又包含了一些語句或語句函項，如果我們用相等的語句去代換这些語句或語句函項，那么，这样代換以后所得到的新語句同原来那个整个語句是等值的。我們在 §10 中的某些命題与說法就是根据于这个事实的；試指出 §10 中的这些命題与說明。

17. ㊉㊈ 考虑下面这两个語句：

(a) 从：如果 p，那么 q，可推出：如果 q，那么 p；

(b) 从：如果 p，那么 q，可推出：如果不 p，那么不 q。

假如以上两个語句是邏輯定律，能否像应用逆反定律那样(参

---

① 这些定律是杰出的英国邏輯家摩根所創立的。

看§14)，将这两个語句应用在数学的证明里？从某一个給定的蘊函語句，能推出哪些共軛語句？从而看出：(a)与(b)这两个語句都是眞語句这个假定能够成立嗎？

18. 試划出17題中(a)与(b)两个語句的眞値表，来确立我們在17題中所作的結論。

19. 研究下面两个語句：

昨天是星期一这个事实，蘊函今天是星期二；

今天是星期二这个事实，蘊函明天是星期三。

根据§12所讲的假言三段論定律，从上面两个語句中能推出什么語句？

*20. 作出前一个习題的完全的证明。应用上述假言三段論定律；并应用代換規則与分离規則——此外，再加上下列这个推理規則：如果两个語句被接受为眞，那么，由它們所构成的合取式，也可以被接受为眞。

(III) 同 一 理 論

§16. 不屬于語句演算的邏輯概念；同一概念

上章所讲的語句演算，只是邏輯中的一个部分。无疑，它是一个最根本的部分。当我們在邏輯的其他部分中，要定义一个語詞与证明一条邏輯定律时，都要应用到語句演算中的語詞与定律。至少就这点說，語句演算是最根本的。然而，語句演算本身却并不能形成其他科学的，特别是数学的充分基础。在数学的定义，定理与证明中，我們經常会遇到屬于邏輯中的其他部分的概念。这些概念中的一部分，我們将在本章与以后两章中予以討論。

在这些不屬于語句演算的概念中，很可能，同一或相等这个概

念是一个最重要的概念。这个概念出現在，例如，下面这样一些表达式中：

x 是与 y 同一的，

x 是与 y 相同的，

x 等于 y。

这三个表达式的意义都是一样。为了簡便起見，可以用

$$x=y$$

这个符号表达式来代换它們。

同样，我們可以将

x 与 y 不是同一的，

x 与 y 不相同，

写成下面这个公式

$$x\neq y。$$

有关这些表达式的一些普遍定律，构成为邏輯的一个部分，它叫做**同一理論**。

§17. 同一理論的基本定律

在关于同一概念的邏輯定律中，最根本的一个定律就是下面这个定律：

(I) $x=y$，当且仅当 y 所具有的每一个性质，x 都具有，同时，x 所具有的每一个性质，y 也都有 ⊖⊕。

簡单一些，我們也可以說：

$x=y$，当且仅当 x 与 y 的每一性质都是相同的。

这个定律还可以有其他，也許更显著，但是比較地不太正确的表述方式，例如：

$x=y$，当且仅当一切凡可以用于断定 x 与 y 其中之一的，

都可以用于断定其中之另一。

上面那个定理(I)是萊布尼茲首先提出来的①(虽然所用的語詞略有不同),因此它可以叫作萊布尼茲定律。它采取了等值式的形式,因而,在等值式的左边的 $x=y$, 可以用在等值式的右边的表达式去代换,也就是說,用不包含符号"="的表达式去代换它。因而,从形式方面看,这个定律可以看作是对于符号"="的定义,并且萊布尼茲自己也是这样看的。(当然,只有在这样的情况下,即:定律右边的那个表达式,即"y 所具有的每一个性质,x 都具有,同时,…"的意义,在我們看起来比符号"="的意义还更清楚,这时候我們說萊布尼茲定律是一个定义,这句話才有意义;参看 §11。)

从萊布尼茲定律,可以得出下面这个非常重要的規則,即:如果在某一叙述范圍內,一个具有等值式的公式,例如

$$x=y$$

已經被假定或证明为眞,那么,在这个叙述范圍內,任何公式或語句中如果含有这个等值式的左边的表达式,我們都可以用这个等值式的右边的表达式去代换它,反之亦然:例如,用"x"去代换"y",或者,相反地,用"y"去代换"x"。这里,需要指明,如果"x"在一个公式中的好几个地方出現,我們可以在有些地方用"y"去代换它,在另一些地方又让"x"保留不变。而在 §15 中所讲的代入規則,是不允許代换一部分而另一部分又保留不变的。这是这里所讲的这个規則和代入規則的根本差别。

从萊布尼茲定律,我們还可以得出好些关于同一理論的定律。这些定律,在各門科学中,特别在数学中是常常要被应用的。下面,我們将举出一些最重要的关于同一理論的定律,和它們的证明

① 参看第 16 頁, §6 注①。

的大概步驟；以便借助于这些具体的例子說明：在邏輯領域与数学領域的推理之間，并沒有根本性的差別。

(II) 每一个事物都等于它自身，$x=x$。

証明：用“x”去代换“y”，从萊布尼茲定律，便可得到：

$x=x$，当且仅当 x 所具有的每一个性质，x 都具有，同时，x 所具有的每一个性质，x 都具有。

根据 §12 中所讲的重言定律 $(p\wedge p\leftrightarrow p)$，我們可将上面語句中“同时”以后的部分省掉，而得：

$x=x$，当且仅当 x 所具有的每一个性质，x 都具有。

又根据 §12 中所讲的同一律，(即是，如果 x 具有某一个性质，那么，x 就具有这个性质。)很显然，上面等值式的右边的这个表达式总是眞的。因而，等值式的左边的表达式，也总是眞的。换言之，我們証明了

$$x=x。$$

(III) 如果 $x=y$，那么，$y=x$。

証明：用“y”代换萊布尼茲定律中的“x”，同时，用“x”代换萊布尼茲定律中的“y”，我們得到：

$y=x$，当且仅当 x 所具有的每一个性质，y 都具有，同时，y 所具有的每一个性质，x 都具有。

让我們把上面这个語句同萊布尼茲定律比較一下。它們都是等值式。两个等值式的右边的表达式都是合取式。这两个合取式的不同，仅仅在于合取式中的两个部分的顺序不同。根据 §13 所讲邏輯乘法的交換律，这两个合取式是等值的。因而，上面这个語句中左边的表达式，即“$y=x$”，与萊布尼茲定律的左边的表达式“$x=y$”，也是等值的。

这样，从 $x=y$，就推出 $y=x$。这就是我們所要証明的。

(IV) 如果 $x=y$,而且 $y=z$,那么,$x=z$。

证明:根据假設,下面公式:

$$(1)\ x=y$$

与

$$(2)\ y=z$$

是眞的。根据莱布尼茲定律,由(2)我們得出:一切可以用去断定 y 的,都可以用去断定 z。因而,我們可以在(1)中用"z"去代換"y",于是便得到:

$$x=z \ominus\ominus。$$

(V) 如体 $x=z$,而且 $y=z$,那么,$x=y$;換言之,等于同一事物的两个事物是互相相等的。

这个定律可以用类似上一个例子的办法去証明,也可以不用莱布尼茲定律,而从上面定律(III)与(IV)推出。

定律(II),(III)与(IV)分别地叫作同一关系的**自反定律**,**对称定律**与**傳递定律**。

§18. 事物之間的同一与指示詞之間的同一;引号的用法

*虽然像下面这样一些表达式,如:

$$x=y \text{ 或 } y\neq x$$

的意义是明白的,但是,有时候也有些誤解。例如,

$$3=2+1$$

是一个正确的公式,这是很显然的;但是,有些人却有点怀疑它的正确性。按他們的意見,这个公式看起来好像是断定符号"3"与符号"2+1"是同一的,这一点显然并不眞,因为这些符号的外形完全不同,从而,我們就不能說:一切凡可以用于断定"3"的,都可以用

于断定“2+1”。(例如，“3”是一个单一的符号，而“2+1”便不是。)

为了避免这一类怀疑，我們最好要弄清楚一个非常普遍而且重要的原則，任何語言的有效应用都要依靠这个原則。这个原則是：任何时候，我們用一个語句去断定某个事物，我們就将这个事物的名称或指示这个事物的指示詞放在这个語句中，而不是将这个事物本身放在这个語句中。

只要一个語句所断定的对象不是一个字，一个符号，或更一般地說，不是一个語言中的一个表达式，那么，对上面那个原則的应用，是不会产生任何疑問的。例如，让我們設想：我們前面有一块小小的藍宝石，我們說下面这句話：

这块宝石是藍色的。

在这个語句中，“这块宝石”这几个字合起来构成一个指示宝石这个东西的指示詞。大概沒有人会想到，要在这个語句中用那块宝石去换下“这块宝石”这几个字，即是說，从这个語句中把“这块宝石”这几个字挖掉，而在这几个字所在的地位放上一块宝石。因为，这样一来，我們就得出了这样一个整体，它的一部分是一块宝石，而另一部分則是几个字；这个东西根本不是一个語言表达式，更說不上是一个眞語句了。

但是，如果我們在一个語句中所断定的对象恰恰是一个字或一个符号，这个原則就常常会被違反。但是，即使在这一情形下，这个原則的应用仍然是必不可少的。因为，如果不这样，那么，虽然我們能得出一个語言的表达式，但是，这个表达式却根本沒有表达我們所想要表达的思想，而更多的时候，是得出一堆毫无意义的語詞的堆积。例如，让我們考虑下面两个字或語詞：

好，　　瑪丽；

很明显，第一个字是由六笔构成，而第二个字是一个女人的专名。

但是，让我們設想，如果我們把这个无疑是正确的思想表示如下：

(I) "好"是由六笔构成。

(II) 瑪丽是一个专名。

这样，在我們說到这些字或詞的时候，我們就是用了这些字或詞本身，而不是用的这些字或詞的名称。如果我們再仔細研究一下(I)与(II)，我們必得承认：(I)根本不是一个語句，因为一个語句的主詞，只能是一个名詞而不能是一个形容詞。(II)也許可以看作是一个有意义的語句，但是，无論如何，是一个假的語句，因为沒有一个女人是一个专名。

为了避免这些困难，也許我們可以这样假定，說："好"与"瑪丽"用在(I)与(II)中的意义，不同于它們平常的意义：在(I)与(II)中，它們是表示它們自己的名称。如果把这个看法普遍化起来，我們就必須承认：任何字或語詞，有时候，都可以用作为它自己的名称；借用中古世紀的邏輯术語，我們可以說，在这种情形下，一个字或語詞是用于它的**实质的指謂**(suppositio materialis)，即用于表示它自身，而不是用于它的**形式的指謂**(suppositio formalis)，即用于它的平常的意义。这样一来，日常語言与科学語言中的每一个字或語詞，就至少都有了两个不同的意义：我們不必費事就会找到很多疑难不明的情形，那时候，我們会不知道究竟应該采用那一种意义。不能滿意于这种情况，因此，我們就要求确定这样一条規則，即：每一个表达式都必須(至少在书写上)和它的名称不同。

于是，就发生了这样的問題，我們如何来造成字、語詞和表达式的名称？为此，有許多不同的办法。最簡单的办法，是作出这样一个約定：在一个表达式外面加上引号。根据这个約定，在前面(I)与(II)中所想要表达的那个思想，就可以正确地、不含混地表示如下：

(I′) "'好'"是由六笔构成。

(II′) "瑪丽"是一个专名。

經过上面这些說明，因此，关于

$$3=2+1$$

这个公式的意义与正确性的一切可能的怀疑，就都可以解除了。这个公式包含指示某些数的符号，但是并不包含任何这些符号的名称。因此，这个公式对于数有所断定，而并不对于指示数的符号有所断定；3 与 2+1 这两个数，很明显地，是相等的，因而，这个公式是一个眞語句。当然，我們也可以把这个公式換成一个說及符号的等値語句，即，我們可以說：符号"3"与"2+1"指示同一个数。但是，这并不意味着，这两个符号本身是同一的；因为，我們都知道，同一个事物——特别是，同一个数——可以有許多不同的指示詞。"3"与"2+1"这两个符号，无疑是不同的，而这个事实可以用下面这个新的公式来表示，即：

$$“3” \neq “2+1”$$

这个新的公式，当然，和上面那个公式并沒有任何矛盾①*㊀㊀。

§19. 算术与几何中的相等，和它与邏輯同一的关系

在这里，我們将数与数之間的算术上的相等这个概念，一貫地

① 本书相当一貫地遵守了关于引号用法的这个約定。只在很少数場合下，为了照顾到傳統的用法才有一些例外。例如，当一个公式或語句被特別印成一行，或者，它出現在数学或邏輯的公式中，这时候我們对这个公式或語句就不用引号；有时，我們在一个表达式前面加上"所謂的"，"被称为"这样的短語，就也不再用引号。但是，即使在上面这些場合，我們也采取一些相应的办法；我們常常在那些表达式前面加上冒号，而且这些表达式經常印成特殊的字体（如大小写体或斜体）（在中譯本中用不同的字体来区分）。可以注意到，在日常語言中，在有些不屬于上述引号用法的地方，也有用引号的；这类例子在我們这本书中也可以找到。

看作是邏輯的同一这个普遍概念的一个特殊事例。然而，这里要附加說明一下，有些数学家采取不同于我們的观点，他們认为算术中的“=”这个符号与邏輯同一这个符号是不相同的；他們认为：相等的数不必然是同一的。因此，他們将数与数之間的相等这个概念，当作一个算术特有的概念。在这点上，这些数学家抛棄了萊布尼茲定律的普遍形式，而只承认萊布尼茲定律某些只具有較小普遍性的結論，他們将这些結論列为数学所特有的定理。这些数学家所承认的，有 §17 中从(II)到(V)这几条定律，以及具有下列含义的一些定理，即：任何时候，凡 $x=y$ 而且 x 滿足某些仅由算术符号所构成的公式，那么，y 也滿足这些公式；例如，他們所承认的有下列这个定理：

如果 $x=y$ 而且 $x<z$，那么，$y<z$。

我們认为：这些数学家的这一看法，并沒有什么特别的理論上的优越性；相反，在实踐上，它为算术系統的表述引起不少麻煩。因为，由萊布尼茲我們得到一个普遍規則，即：假定某一等值式成立，我們在任何地方能用这个等值式的右边的表达式去代換它的左边的表达式。这样一种代換在許許多多的論证中是必不可少的。而現在，如果抛棄了这个普遍規則，那么，就在每一个应用这种代換的地方，都有必要作一个特殊的证明 ㊀㊂。

用一个例子来說明这一点，让我們考慮一組包含两个变項的等值式，例如：

$$x=y^2,$$
$$x^2+y^2=2x-3y+18。$$

如果一个人想要用所謂代入法去解这組等式，那么，他必須作出一組新的等式，即，使第一个等式不动，而在第二个等式中用“y^2”去代換全部“x”。但是問題就发生了：是否可以允許作这样一种变換

呢？也就是說，这一組新的等式是否与原来的那組等式相等呢？无疑，不論我們对于数与数之間的相等这个思想采取那一种概念，这里的答案总是正面肯定的。但是，如果“＝”这个符号被了解为指示邏輯的同一，而且，如果又接受了萊布尼茲定律，那末答案就可以很明显。因为

$$x=y^2$$

这个設定，允許我們在任何地方用“y^2”去代换“x”，反之亦然。相反的，如果不把符号“＝”了解为指示邏輯的同一，不接受萊布尼茲定律，那么，首先就要提出理由，說明为什么作那样的变换是可以允許的。即使提出这样的理由沒有任何重大的困难，无論如何也将是冗长而令人厌煩的。

关于几何中的相等的概念，情形就完全不同。如果我們說两个几何图形(如两綫段，或两个角，或两个多角形)是相等的或全等的，一般地我們的意思并不是想說它們是同一的。我們只是想表示：这两个图形有同样的大小与形式，换言之——如果用一个不太正确的、形象的說法——如果将一个图形移到另一个图形上去，它們将完全相合。因此，例如，一个三角形可以有两条，或甚至三条相等的边，但是，这些边显然并不同一。另一方面，也有这样的情形，例如，在一个等腰三角形中，底边的垂綫与中綫就不只是几何上的相等，而且根本是一条同一的綫段，因此这里就不只是两个图形的几何相等的問題，而是邏輯同一的問題。因此，为了避免混乱，在这些并不屬于邏輯同一的場合下，最好一貫避免用“相等”这个語詞，最好是說几何上相等的图形，而不說全等的图形，用另一个不同的符号——一般也有人这样做——例如，“≅”这个符号，去代替“＝”。

§20. 数的量詞

利用同一这个概念，就可能确定数的量詞的准确意义。数的量詞，无論在內容和作用上，都与全称量詞和存在量詞很相近，它們也是属于运算子，只是具有一种比較特殊的性质而已。这些数的量詞的表达式，例如：

至少有一个，或，至多有一个，或，恰恰有一个事物 x，使得…，

至少有两个，或，至多有两个，或，恰恰有两个事物 x，使得…，

以及等等，在这些表达式中，从外表看，好像包含了数学所特有的語詞，例如"一"，"两"，等等。然而，如果加以更确切的分析，可以看出这些表达式的內容(作为一个整体看)是属于一种純粹邏輯性质的。因此，在

至少有一个事物滿足这个給定的条件

这一表达式中，"至少一"这几个字可以換成"一个"这个不定冠詞而并不会改变表达式的原意。而这个表达式：

至多有一个事物滿足这个給定的条件

与下面这个表达式：

对于任何 x 与 y，如果 x 滿足这个給定的条件，而且，如果 y 滿足这个給定的条件，那么，$x=y$

意义是相同的。

而下面这个語句：

恰恰有一个事物滿足这个給定的条件

与上面剛才所举的那两个語句的合取式是等値的，即：

至少有一个事物滿足这个給定的条件，而且至多有一个事物滿足这个給定的条件。

关于

至少有两个事物滿足这个給定的条件

这个語句，我們把它了解为：

有 x 与 y，而 x 与 y 都滿足这个給定的条件，而且 $x \neq y$；

因而，它和下面这个語句的否定式是等値的，即：

至多有一个事物滿足这个給定的条件。

以同样的方式，我們也可以說明屬于这一范疇的其他种种表达式的意义。

下面，作为例子，再举几个含有数的量詞的算术上的眞語句：

恰恰有一个数 x，使得 $x+2=5$；

恰恰有两个数 y，使得 $y^2=4$；

至少有两个数 z，使得 $z+2<6$。

邏輯中有一个部分，其中确定有关量詞的种种普遍定律，这个部分称作**假变項的理論**，或叫作**函項演算的理論**，虽然实际上它应当称作**量詞演算**。到目前为止，这一理論主要是研究全称量詞与存在量詞，而数的量詞一般还沒有被顾到。

练　　习

1. 证明 §17 中的(V)；試只用 §17 中的(III)与(IV)这两条定律，而不用萊布尼茲定律。

提示：在定律(V)中，下面两个公式：

$$x=z \text{ 与 } y=z$$

是被假定为眞的。根据定律(III)，将上面第二个公式中的两个变項互調，再应用定律(IV)。

2. 試仅用 §17 中的定律(IV)，证明下面的定律：

如果 $x=y, y=z$ 而且 $z=t$，那么，$x=t$。

3. 在 §17 的定律(III)与(IV)中，用“$\neq$”去代換“$=$”，結果所

得到的語句，都是眞的嗎？

*4. 在 §18 中我們談到关于引号的用法所作的約定；試根据这个約定，决定下列語句中哪些是眞的。

(a) 0 是一个整数，

(b) 0 是一个蛋圓形的符号，

(c) “0”是一个整数，

(d) “0”是一个蛋圓形的符号，

(e) $1.5=\frac{3}{2}$，

(f) “1.5”=“$\frac{3}{2}$”，

(g) $2+2\neq5$，

(h) “2+2”≠“5”。

*5. 我們在一个語詞上加上引号，就形成这个語詞的名称；我們在一个語詞的名称上加上引号，就形成这个名称的名称，这样，这个語詞外边就有两付引号。因此，在下面三个表达式

約翰，“約翰”，““約翰””

中，第二个是第一个的名称，而第三个是第二个的名称。

依次用上面的三个表达式去代换下面四个語句函項中的“x”，便得到十二个語句。試指出这十二个語句中哪些是眞的：

(a) x 是一个人，

(b) x 是一个人的名称，

(c) x 是一个表达式，

(d) x 是一个带有引号的表达式。

* 6. 在 §9 中，我們曾提出了許多在数学书籍中常見的条件語句的表述方式。当时我們曾指出，在其中有些表述方式中，我們所談的不是数、数的性质，等等，而是表达式（例如，語句与語句函項）。从 §18 的討論，我們知道，这一类表述方式就需要应用引号；

試指出是这类表述方式，幷具体地在这类表述方式中的哪些地方需要加上引号。

*7. ㊀㊃根据前面所說的在对于事物有所断定的語句中应用事物的名称这一普遍原則，現在我們可以給 §12 中倒数第二句（即："正如带有普遍性质的算术定理……，" 这一句）以一些批評。我們知道，在算术中出現的变項，是代表数的名称的。在語句演算中出現的变項，是代表語句的名称呢？还是代表語句本身呢？因此，如果要求更确切一点的話，我們能否說，語句演算的定律对于語句与語句的性质有所断言？

8. 一个三角形有 a, b, c 三边；h_a, h_b, h_c 分别是垂直于 a, b, c 三边上的高，m_a, m_b, m_c 分别是 a, b, c 三边的中綫，s_a, s_b, s_c 分别是三个角的平分綫。

假定这个三角形是二等边三角形（a 是底边，b 与 c 两边相等），在上面所說的那十二条綫中，哪些是全等的（即，几何意义上的相等）；哪些是同一的？将答案作成公式的形式，用符号"$\cong$"表示全等，用符号"$=$"表示同一。

再假定这个三角形是三等边三角形，試答复上面的問題。

9. 說明下列表达式的意义：

(a) 至多有两个事物滿足这个給定的条件；

(b) 恰恰有两个事物滿足这个給定的条件。

10. 决定下面語句中哪些是眞的：

(a) 恰恰有一个数 x，使得 $x+3=7-x$；

(b) 恰恰有两个数 x，使得 $x^2+4=4x$；

(c) 至多有两个数 y，使得 $y+5<11-2y$；

(d) 至少有三个数 z，使得 $z^2<2z$；

(e) 对于任何数 x，恰恰有一个数 y，使得 $x+y=2$；

(f) 对于任何数 x，恰恰有一个数 y，使得 $x\cdot y=3$。

11. 如何用数的量詞来表示下列事实，即：公式

$$x^2-5x+6=0$$

具有两个根？

12. 什么数 x 滿足下面的語句函項：

恰恰有两个数 y，使得 $x=y^2$

在上面語句函項中，哪个是自由变項，哪个是約束变項？*数的量詞是否也約束变項？*

(Ⅳ) 类的理論

§21. 类与它的元素

除了个别的事物(簡称个体)以外，邏輯还研究事物的类(class of things)㊀㊄。在日常生活与数学中，类常常叫作集合 (set)。例如，算术常常研究数的集合；在几何中，我們对于单个的点的兴趣，沒有像对于点的集合那样大（即是說，沒有像对于几何位形[configuration]的兴趣那样大)，个体的类叫作一級类。在我們的研究中，較少地也要碰到二級类。二級类是这样的类，它不是由个体所构成，而是由一級类构成的。有时，我們甚至要研究三級类、四級类…。在本书中，我們差不多只是研究一級类，只是在 §26 中，例外地我們将談到二級类。但是，我們所讲的，实际上可以无需作甚么改变就能应用于任何級的类。

为了分别个体与类(并分别各級的类)，我們要用不同文字的、不同形状的字母来作为变項。习慣上，往往用英文的小写字母表示个体（例如，个别的数)，用英文的大写字母表示这些个体的类。在初等几何中，所采取的是一个相反的办法，大写字母表示点，而

小写字母(如英文或希腊文的小写字母)則表示点的集合。

在邏輯中，研究类这个概念和它的一般性质的这个部分，叫作**类的理論**。有时候，这个理論也作为一門独立的数学学科来研究，叫作**一般集合論**。①

在类的理論中，带有根本性质的是下面的这些表达式，如：

事物 x 是类 K 中的一个元素，

事物 x 金于类 K,

类 K 包含事物 x 作为一个元素。

我們将这些表达式看作都是相同意义的，并为了簡单起見，用下面这个公式替代它們：

$$x \in K$$

这样，如果 I 是所有整数的集合，那么，1, 2, 3, …这些数是这个集合的元素，而 $\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$…这些数，不屬于这个集合。因此，公式：

$$1 \in \mathrm{I},\ 2 \in \mathrm{I},\ 3 \in \mathrm{I},\ \cdots$$

是眞的，而公式

$$\frac{2}{3} \in \mathrm{I},\ 2\frac{1}{2} \in \mathrm{I},\ \cdots$$

是假的。

§22. 类和包含一个自由变項的語句函項

让我們来研究一个包含一个自由变項的語句函項，例如：

---

① 在布尔的著作中，已經开始研究类的理論，或者，更准确一点説，已經开始研究到我們在下面称之为类的演算的那一部分(参看第16頁§6注①)。集合論，作为一个独立的数学学科，它的实际的創始者是偉大的德国数学家康脫(G. Cantor, 1845—1918)；特别是，关于权的等値、基数、无限和級等等这些概念的分析(我們在本章和以下各章要討論到它們)，应該归功于康脫。康脫的集合論，是正在迅速发展中的数学理論之一。集合論的概念与思想，已經滲透到几乎所有的数学分支中，而且已經到处产生出极有启发性的与創造性的影响。

$$x>0$$

如果我們在这个語句函項前面，加上

(I) 这个由所有数 x 构成的集合，使得

我們就得到下面这个表达式：

这个由所有数 x 构成的集合，使得 $x>0$。

这个表达式指示一个确定的集合，即是說，指示那个由所有的正数所构成的集合。这个集合以，而且仅仅以那些滿足这个函項的数为它的元素。如果我們用 **P** 表示这个集合，这个函項就同

$$x \in \mathbf{P}$$

等值。

我們可以把类似的办法用于任何别的語句函項。用这个办法，在算术中，我們可以得到各种关于数的集合，例如，可以得到由所有負数所构成的集合，或者由所有大于 2 而小于 5 (即滿足函項"$x>2$ 与 $x<5$")的数所构成的集合。这个办法在几何中也起重要的作用，特别是在定义各种新的几何图形时；例如，一个球形的曲面就定义为一个由这个空間的所有的点所构成的集合，这些点与一个給定的点有确定的距离。在几何中，习慣上我們用"这些点的軌迹"一詞来代替"所有点的集合"一詞。

現在，我們将給予上面所讲的办法一个普遍的形式。在邏輯中，我們肯定：对于每个只包含一个自由变項 (如"x") 的語句变項，恰恰有一个相应的类，这个类以，而且仅仅以那些滿足这个函項的事物 x 为它的元素。将下面这个表达式 (类的理論中的基本的表达式之一)：

(II) 这个由所有 x 构成的类，使得…

加在那个語句函項的前面，我們就得出一个指示那个类的指示詞。又，如果我們用一个单一的符号，如 **C**，来表示所說的这个类，

那么，

$$x \in \mathbf{C}$$

这个公式——对于任何 x 来說——和原来的那个語句函項是等值的。

因此，我們知道，任何只包含 x 作为它的唯一的自由变項的語句函項，都可以变换成一个具有

$$x \in K$$

这样形式的等值的函項，在这个函項中 K 表示一个指示一个类的常項。因此，我們可以把 $x \in K$ 这个公式看作是只包含一个自由变項的語句函項的最普遍的形式。

前面 (I) 与 (II) 这两个短語有时也用符号表达式来代替。例如，我們可以用

$$\underset{x}{\mathbf{C}}$$

这样一个符号来代替它們。

*現在，让我們看下面这个表达式：

1 屬于那个由所有 x 构成的集合，使得 $x>0$。

这个表达式用符号写出来，就是

$$1 \in \underset{x}{\mathbf{C}}(x>0)。$$

这个表达式，很明显，是一个語句，而且甚至是一个眞語句。它用一个更复杂的形式来表示

$$1>0$$

所表示的思想。因此，它不能包含任何自由变項，而在它之中所出現的变項 x 必定是一个約束变項。但是另一方面，因为我們在它里面看不到任何量詞，因此我們可以得出結論：(I) 或 (II) 这些短語一定起着量詞的作用，即是說，能够約束变項。因此，(I) 与 (II) 那样的短語，也应当看作是一种运算子（參看 §4）。

应当附带說明一下，在一个除了包含变項“x”以外还包含其他自由变項的語句函項前面，我們常常也加上一个像(I)与(II)这样的运算子。（在几何中，凡是应用这类运算子的場合，情形差不多都是这样。）这样得出的表达式，例如：

这个由所有的数 x 所构成的集合，使得 $x>y$，

就不表示任何确定的类。这样的表达式，是§2中所說的指示函項，也就是說，如果我們用常項去代換其中的自由变項（但不代換“x”），例如，在上面例子中，用“0”去代換“y”，那么，这个表达式就变成指示类的指示詞*。

我們常說：包含一个自由变項的語句函項，是表示某一种性质；这种性质是那些，而且只是那些滿足这个語句函項的事物所具有的（例如，“x 是可被2除尽的”这个語句函項表示数 x 的一种性质，即：可被2除尽这种性质，或，是偶数这种性质）。相当于这个函項的类，包含，并且只包含具有这个性质的一切事物作为它的元素。这样，对于事物的每一个性质，就有一个唯一的确定的类与之对应。而且，反过来，对于每一个类，也有一个唯一为这个类的元素所具有的性质，也就是說，从屬于这个类这样一种性质，与这个类对应。因此，許多邏輯学家认为：根本不需要分别类这个概念和性质这个概念。换言之，一种专門的“性质論”是不必要的——有了类的理論就完全足够了。

作为这个看法的一个应用，我們可以給萊布尼茲定律作一个新的表述。§17中的萊布尼茲定律包含了“性质”这个語詞，在下面这个和它完全等值的表达式中，我們代之以“类”这个語詞：

$x=y$，当且仅当每一个包含 x 与 y 中的任一个作为元素的类，也包含另一个作为元素。

从萊布尼茲定律的这个新的表述中，我們能够看出：同一概念

可以用类的理論来加以定义[16]。

§23. 全类与空类

上面我們知道，相应于任何只包含一个自由变项的語句函項，总有一个由滿足这个語句函項的一切对象所构成的类。这一点也可以用于下面两个特殊的函項：

(I) $x=x, \quad x \neq x$。

很显然，任何事物都滿足第一个函項(参看 §17)。因此，和它相应的类

$$\underset{x}{\mathbf{C}}(x=x),$$

包含一切个体作为元素。我們将这个类叫作**全类** (universal class)，并用符号“$\vee$”(或“1”)来表示它。另一方面，却沒有任何事物滿足第二个函項。因此，和它相应的类

$$\underset{x}{\mathbf{C}}(x \neq x),$$

我們叫作**空类**(null class 或 empty class)，并用“$\wedge$”或“0”表示它。空类不包含任何元素[17]。現在，我們可以用具有

$$x \in K$$

这种形式的等值的函項去代换(I)，即得出

(II) $x \in \vee, \quad x \in \wedge,$

任何个体都滿足第一个公式，但沒有任何个体滿足第二个公式。

在一門特殊的数学理論中，我們最好精确地指出，甚么是这个理論中的个体，而不用一般的个体这个邏輯的概念。这样，由这些个体所构成的类将可以用“$\vee$”来表示，并称之为这个数学理論的**論域** (universe of discourse)。例如，在算术中，由所有的数所构成的类，就是它的論域。

*应当着重指出，$\vee$是所有的个体所构成的类，但是，$\vee$却不包

含所有可能的事物，因而，也不包含一級类、二級类…作为它的元素。至于一个包含所有的可能事物的类是否存在，并且更一般地說，我們是否可以考慮不屬于一个特定的級而既包含个体又包含各級的类作为它的元素的“不齐”的类(inhomogeneous class)——这一点本身是一个問題。

这个問題和近代邏輯中一个最困难的問題密切有关，也就是說，是和所謂罗素悖論以及邏輯类型理論(theory of logical type)密切有关的。[①] 关于这个問題的討論，将超出本书預定的范圍。这里我們只需要指出，即使在整个数学中也很少需要考慮“不齐”的类（只有在集合的一般理論中是例外），至于在其他科学中这种需要就更少了。*㊀㊃

§24. 类与类間的基本关系

在两个类 K 与 L 之間，可以有各种不同的关系。例如，可以有这样的情形：类 K 的每一个元素同时又是类 L 的一个元素。在这种情形下，K 类就叫作 L 类的子类，或者說它被包含于 L 类中，或者說 K 类对于 L 类有包含于的关系；而就 L 类說，则是 L 类包含 K 类作为它的一个子类。这种情形，可以簡单地用下面任何一个公式来表示：

$$K \subset L \quad 或 \quad L \supset K.$$

当我們說 K 是 L 的子类，这并不排除 L 也是 K 的子类这种可能性。換言之，K 与 L 可以互为子类，并从而，K 与 L 的所有的元素

① 罗素所提出的邏輯类型这个概念，是与类的級这个概念密切相关的；甚至邏輯类型这个概念可以看作是类的級这个概念的普遍化。邏輯类型这个概念，不仅涉及类，而且也涉及到别的东西，例如，涉及到我們在下一章所要討論的关系。邏輯类型这个理論，在罗素的《数学原理》一书中得到了系統的发展。(参看第 16 頁 §6 注①)

都是共同的。在这个情形下，从(以下要讲到的)一条关于类的理論的定律，就可以推出：K与L是同一的。但是，如果逆关系不成立，即是說，如果K类的每个元素都是L类的元素，而L类的每个元素并不都是K类的元素，那么，K类就叫作L类的眞正子类(proper subclass)，或叫作L类的部分(part)。例如，由所有整数构成的集合是由所有有理数构成的集合的眞正子集合，又例如，一条綫中的一段是这条綫的部分。

如果在两个类K与L中，至少有一个元素是共同的，而且如果K(或L)中所包含的有些元素不是L(或K)中的元素，那么，我們就說，K类与L类相交。如果两个类至少都各有一个元素(即是說，它們都不是空类)，同时，如果它們沒有一个元素是共同的，我們就說，它們是不可兼的，或者說不相交的 (mutually exclusive 或 disjoint)。例如，一个圓与通过圓的直綫是相交的，而一个圓与一条距离圓心大于圓的半徑的直綫，却是不相交的。由一切正数构成的集合与由一切有理数构成的集合相交，但是正数的集合与負数的集合是不可兼的。

关于上面所讲的这些类与类之間的关系，让我們举几个有关这些关系的定律的例子：

对于任何类K，$K\subset K$。

如果$K\subset L$而且$L\subset K$，那么，$K=L$。

如果$K\subset L$而且$L\subset M$，那么，$K\subset M$⊖⑳。

如果K(不空类)是L的一个子类，而且如果L类与M类是不相交的，那么，K类与M类是不相交的。

上面第一个公式，就叫作包含的自反定律，或叫作类的同一律。上面第三个公式，就叫包含的傳递定律。第三个公式和第四个公式(以及其它类似的公式一起)，形成一組命題，統称为直言三

段論定律(laws of the categorical syllogism)。

就包含这个概念說，全类与空类的特性可用下面定律表示：

对于任何类 K, $\vee \supset K$ 而且 $\wedge \subset K$。

这个定律，特别是就它的涉及空类的第二部分(即 $\wedge \subset K$)說，許多人都觉得它有些悖謬。为了要证明这个定律中的第二部分，让我們研究下面这个蘊函式：

如果 $x \in \wedge$，那么，$x \in K$。

无論我們用什么去代换“x”与“K”，这个蘊函式的前件都将是假的；因而这个蘊函式是眞的（如像一些数学家有时說的，这个蘊函式是“空虛地”被滿足的)。这样，我們就可以說：凡是类 $\wedge$ 的元素，必同时也是类 K 的元素。因此，根据包含的定义，就可以得出 $\wedge \subset K$。同样，用类似的方法，我們也可以证明这个定律的第一部分(即 $\vee \supset K$)。

很容易看出，任何两个类之間必定具有上面所說的那些关系之一。这一点表示为下面这个定律：

如果 K 与 L 是任意的两个类，那么，或者 $K=L$，或者 K 是 L 的眞正子类，或者 L 是 K 的眞正子类，或者 K 与 L 是相交的，或者 K 与 L 是不相交的；K 与 L 之間不能同时具有两种上面所說的关系。

为了对这个定律有一个清楚的、直觉的了解，最好将类 K 与 L 設想为几何图形，同时，想像这两个图形相互間所有可能的位置。

以上这些在这一节里所已經討論到的关系，可以叫作类与类間的基本关系。①

整个的旧的傳統邏輯（参看 §6）几乎可以完全簡化为类与类

① 法国数学家杰尔哥納 (J. D. Gergonne) 是第一个人开始对这些关系作了全面彻底的研究。

之間的基本关系的理論。即是說，簡化为类的理論中的一个小部分。从外表看，这两种理論的不同在于：在旧邏輯中，类这个概念并不显明地出現。在旧邏輯中，例如，不說：馬类包含于哺乳动物类，而习惯于說：所有的馬都有哺乳动物这个性质，或者簡单地說：所有的馬都是哺乳动物。傳統邏輯中的最重要的定律是一些直言三段論定律，它們完全相当于我們上面所指出的那些关于类的理論的定律（这些定律我們沿用旧名称作直言三段論定律）。例如，我們上面所讲的第一条三段論定律（即：如果 $K\subset L$ 而且 $L\subset M$，那么 $K\subset M$），就相当旧邏輯中的

> 如果每一 M 都是 P，而且每一 S 都是 M，那么，每一 S 都是 P。

这是傳統邏輯中的一条最有名的定律，普通称作三段論定律中的 Barbara 式。

§25. 类的运算

现在我們要来研究一下某些演算，运用这些演算于已定的类，便可产生新的类。

給定两个类 K 与 L，我們就能形成一个新的类 M，而 M 包含、而且仅仅包含那些至少屬于 K 与 L 两者之一的事物。我們可以說，M 类是由 K 类的元素再加上 L 类的元素而成的。这个运算叫作**类的加法**；M 类叫作 K 类与 L 类的**和**（sum 或 union）。

K 与 L 的和，可用符号表示如下：

$$K\cup L（或\ K+L）。$$

我們还可以形成另外一个新的类 M，M 的元素是，并且只是那些既屬于 K 又屬于 L 的事物。这个关于 K 类与 L 类的运算，叫作**类的乘法**。而这个 M 类，叫作 K 类与 L 类的**积**或**交**（product

或 intersection)。K 类与 L 类的积，可以用符号表示如下：

$$K\cap L \quad (\text{或 } K\cdot L)。$$

这两个运算在几何中常常被应用；有时候，可以很方便地用它們去定义新的几何图形。例如，假設我們已經知道一对互补角的意义是什么，那么，半平面——即直角——就可以被定义为两个互补角之和。(这里，一个角应了解为一个角域，即了解为平面的一个部分，其边綫是两条半綫，称为这个角的股)。又，如果我們用一个任意的圓和一个其頂点位于这个圓的圓心的角，那么，这两个图形的交就是一个叫做圓扇形的图形。

让我們再从算术范圍中举两个例子：由所有正数构成的集合与由所有負数构成的集合之和，就是所有不是 0 的数的集合；由所有偶数构成的集合与由所有素数构成的集合之交，就是那个只具有数 2 作为它的唯一元素的集合。2 这个数是唯一的偶素数。

类的加法与乘法遵守着許多定律。其中有一些定律和算术中的关于数的加法与乘法的定理完全类似——正是由于这个理由，我們才选擇"加法"与"乘法"这两个語詞来称呼上面这些类的运算。作为一个例子，我們可以提出关于类的加法与乘法的交換定律和結合定律：

对于任何类 K 与 L，$K\cup L=L\cup K$ 而且 $K\cap L=L\cap K$，

对于任何类 K，L 与 M，$K\cup(L\cup M)=(K\cup L)\cup M$，而且 $K\cap(L\cap M)=(K\cap L)\cap M$。

如果我們用符号"+"与"·"分别代換符号"$\cup$"与"$\cap$"，上述定律和相应的算术定理之間的类似，就变得十分明显。

然而，其他的定律就和算术的定理頗有不同。下面的重言定律就是一个显著的例子。

对于任何类 K，$K\cup K=K$ 而且 $K\cap K=K$。

我們只要思考一下 $K \cup K$ 与 $K \cap K$ 的意义，上面这个定律就很明白。例如，我們在 K 类的元素上加上同一个类 K 的元素，事实上，我們并沒有加上任何东西，因而其結果仍然是同一个类 K。

我們还要提出另外一个演算，它同加法与乘法的演算不同，在于它可以只运用于一个类，而不是运用于两个类。这个演算就是：由一个給定的类 K，我們可以形成一个 K **类的余类**（complement of the class K），即是，可以形成一个由所有不屬于 K 类的事物构成的类。K 类的余类，用符号表示，就是：

$$K'。$$

例如，如果 K 是由所有整数构成的集合，那么，所有的分数与无理数都屬于集合 K'。

关于余类的定律，与确立余类与以前所讲的那些概念的关系的定律，我們举下面这两个公式为例：

$$\text{对于任何类 } K, \quad K \cup K' = \vee。$$

$$\text{对于任何类 } K, \quad K \cap K' = \wedge。$$

第一个公式叫作类的理論方面的**排中律**，第二个公式叫作类的理論方面的**矛盾律**㊂㊉。

类与类間的关系与上面已經讲过的类的运算，以及全类与空类的概念，都由类的理論中的一个特殊部分所加以研究；由于有关这些关系与运算的定律，都具有一些簡单的、和算术定理相类的公式的性质，因此类的理論中的这一部分，叫作**类的演算**。

§26. 等数类，一个类的基数，有穷类与无穷类；算术作为邏輯的一个部分

*在作为类的理論的研究对象的其他概念中，有一組概念值得我們特別注意。这組概念包括：等数类的概念，类的基数的概念，

有穷类与无穷类的概念。这些概念都是相当麻煩的概念，这里只能粗淺地談一談。

作为两个**等数的类**或**相等的类**的例子，我們可以考虑一下右手手指这个集合与左手手指这个集合。这两个集合是等数的，因为我們可以将左手手指与右手手指作成这样的許多对：(i)每个手指只屬于一对。(ii)每对中只包含一个左手手指与一个右手手指。在同样的意义下，由多角形的所有頂点构成的集合，多角形的所有的边构成的集合与多角形的所有的角构成的集合，也是等数的。以后，在 §33，我們将可以給等数类这个概念下一个确切的一般性的定义 ⊜⊖。

現在让我們来考虑一个任意的类 K；无疑的，存在着这样一个性质，这个性质只屬于所有同 K 等数的类，而不屬于任何其他的类。(也就是說，"同 K 等数"这样的一个性质。)这个性质，就叫作 K 类的**基数**，或 K 类的**元素的数目**，或 K **类的数**。这也可以用更簡单更确切的，但也許更抽象的办法来表示：K 类的基数，就是由所有同 K 类等数的类构成的那个集合。由此，可以得出，当且仅当 K 类与 L 类是等数的，那么，K 类与 L 类具有同一的基数。

从类的元素的数目着想，类可以分为有穷类与无穷类。在有穷类中，我們又分別：恰恰包含一个元素的类，恰恰包含两个元素的类，恰恰包含三个元素的类…。这些語詞，在算术的基础上可以很容易地給它們下定义。令 n 为一个任意的自然数(即，非負数的整数)，我們就可以說：如果 K 类同由所有小于 n 的自然数构成的类是等数的，那么，**K 类是由 n 个元素构成的**。詳細点說，如果一个类同由所有小于 2 的自然数所构成的类是等数的，即是說，一个类同由数 0 与 1 所构成的类是等数的，那么，这个类就是由两个元素构成。同样，如果一个类同由 0、1 与 2 构成的类是等数的，

那么，这个类就是由三个元素构成的。普遍地說，如果存在着一个自然数 n，而 K 类是由 n 个元素构成的，那么，我們說 K 类是有穷类；反之，是无穷类。

但是現在，我們已經认識到，还有另一种定义的办法。我們剛才所考虑的所有这些語詞，都可以用純粹邏輯的語詞来加以定义，而完全不需要应用任何屬于算术范圍的表达式。例如，我們可以說：如果 K 类适合下面两个条件，(i)有一个 x 而 $x \in K$，(ii)对于任何 y 与 z，如果 $y \in K$ 而且 $z \in K$，那么，$y=z$（这两个条件也可以換成一个单一的条件，即：恰恰有一个 x，使得 $x \in K$，参看 §20），那么，K 类是由恰恰一个元素构成的。类似地，我們可以定义这些表达式："K 类是由两个元素构成的"，"K 类是由三个元素构成的"，…等等。当我們着手去定义"有穷类"与"无穷类"这些語詞时，問題就变得困难得多。但是，即使是这些語詞，我們也已經能够成功地用純粹邏輯的語詞来对它們下定义（参看 §33）。因此，我們上面所討論的所有这些概念，都已經包括在邏輯的范圍之內。

这一事实产生了一个极重要、极令人注目的結果；因为現在我們知道，数的概念本身，以及同样地，其他一切算术概念，都是能够在邏輯范圍內加以定义的。事实上，我們可以很容易确立那些表示个别的自然数（如"0"，"1"，"2"，……）的符号意义。例如，数1就可以定义为这样一个类的元素的数目，这个类是由恰恰一个元素构成的。（这样一个定义似乎是不正确的，似乎犯了循环定义的錯誤，因为被定义者"一个"在定义者中出現；但是事实上，这里并沒有錯誤，因为"这个类是由恰恰一个元素构成的"这个表达式，应当作为一个整体来看，而这个整体的意义，在前面已經有了定义。）同样，我們也不难定义自然数的一般概念：一个自然数是一个

有穷类的基数。此外，我們还能定义一切有关自然数的运算，还能引进分数、負数、无理数以扩大数的概念，而无需在任何地方超出邏輯的界限。更进一步，还可以仅仅根据邏輯定律来证明一切算术定理（但附有一个条件，即：在这个邏輯定律的系統中必須首先加入一条叫作**无穷公理**的定律；这条定律断定：有无穷多的不同的事物。这条定律直覚地看来，不像其他邏輯定律那样自明）㊂㊁。但是这整个的理論构造是非常抽象的，不容易給予通俗的說明，也不适用于对算术的初步讲解。因此在我們这本书中，我們也不想采取这个概念；我們把数看作是个体，而不看作是性质或关于类的类。但是，已經证明我們有可能将整个算术（包括建筑在算术之上的代数，分析等等，）当作純粹邏輯的一个部分推演出来，单单这个事实本身，就足以称作是近代邏輯研究的最偉大成就之一。①*

练　习

1. 令 K 是由所有小于 $\frac{3}{4}$ 的数构成的集合，試問下面哪些公式是眞的：

$$0\in K,\ 1\in K,\ \tfrac{2}{3}\in K,\ \tfrac{3}{4}\in K,\ \tfrac{4}{5}\in K?$$

2. 研究下面四个集合：

(a) 由所有正数构成的集合，

(b) 由所有小于 3 的数构成的集合，

(c) 由所有数 x 构成的集合，使得 $x+5<8$，

(d) 由所有数 x 构成的集合，x 滿足語句函項“$x<2x$”。

---

① 这个領域中的一些基本观念应該归功于弗萊格（参看第 16 頁 §7 注②）；弗萊格在他的重要的书：《算术基础》（Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884）中，第一次发揮了这些思想。弗萊格的这些思想，又在罗素与怀特海的《数学原理》这本书中得到了系統的、彻底的实現。（参看第 16 頁 §6 注①）

在上面这些集合中，哪些是同一的，哪些是不同的？

3. 由所有这样的点构成一个集合，这些点在空間中与一个定点的距离不超过一个給定的綫段的长度。在几何中，我們将这个集合叫作什么？

4. 令 K 与 L 为两个同心圓，K 的半徑小于 L 的半徑。在 §24 中所討論的哪些关系，存在于 K 与 L 之間？同样的关系是否也存在于 K 与 L 的圓周之間？

5. 划两个正方形 K 与 L，使 K 与 L 之間有下面的关系之一：

(a) $K=L$,

(b) 正方形 K 是正方形 L 的一个部分，

(c) 正方形 K 包含正方形 L 作为一个部分，

(d) 正方形 K 与正方形 L 相交，

(e) 正方形 K 与正方形 L 不相交，

如果 K 与 L 全等，上面哪些关系就不能成立？如果不考慮正方形，而只考慮正方形的周长，上面有哪些問題就不能成立？

6. 令 x 与 y 是两个任意数，使得 $x<y$。我們知道，由所有不小于 x 又不大于 y 的数构成的集合，就叫作以 x 与 y 为端点的区間；这个区間用符号“$[x,y]$”来表示。

下面公式中哪些是正确的：

(a) $[3,5]\subset[3,6]$,

(b) $[4,7]\subset[5,10]$,

(c) $[-2,4]\supset[-3,5]$,

(d) $[-7,1]\supset[-5,-2]$?

在下面这些区間之間有哪些根本关系：

(e) $[2,4]$和$[5,8]$,

(f) $[3,6]$和$[3\frac{1}{2},5\frac{1}{2}]$,

(g) $[1\frac{1}{2},7]$和$[-2,3\frac{1}{2}]$。

7. 下面这个語句(它的結构与§24 讲过的三段論定律相同)是眞的嗎：

如果 K 与 L 不相交，而且 L 与 M 不相交，那么，K 与 M 不相交？

8. ⊜⊜ 将下列公式翻譯成日常語言：

(a) $(x=y)\leftrightarrow \underset{K}{\mathbf{A}}[(x\in K)\leftrightarrow(y\in K)]$,

(b) $(K=L)\leftrightarrow \underset{x}{\mathbf{A}}[(x\in K)\leftrightarrow(x\in L)]$。

§22 与 §24 中的哪些定律，可以用上面这些公式去表达？在 (b) 这个等值式的两边，需要作甚么改变，才可以得到一个关于符号“$\subset$”或“$\supset$”的定义？

9. 令 ABC 是一个任意的三角形，BC 边上有任意一点 D。三角形 ABD 与三角形 ACD 之和形成什么图形？ABD 与 ACD 之积又形成什么图形？

将你的答案用公式表示出来。

10. 試将一个任意正方形表示为：

(a) 两个梯形的和，

(b) 两个三角形的交。

11. 下面的哪些公式是眞的(比較上面第 6 題)：

(a) $[2,3\frac{1}{2}]\cup[3,5]=[2,5]$,

(b) $[-1,2]\cup[0,3]=[0,2]$,

(c) $[-2,8]\cap[3,7]=[-2,8]$,

(d) $[2,4\frac{1}{2}]\cap[3,5]=[2,3]$。

上面有些公式是假的，在那些假的公式中，将“=”右边的表达式加以改正，使假公式变成一个正确的公式。

12. 令 K 与 L 是两个任意的类。如果 $K\subset L$，那么，$K\cup L$ 与

$K \cap L$ 是等于甚么类？詳細說明：$K \cup \vee$，$K \cap \vee$，$\wedge \cup L$ 与 $\wedge \cap L$ 等于甚么类？

提示：在答复第二个問題时，应該想到 §24 关于$\vee$与$\wedge$的定律。

13. 試证明：任何类 K，L 与 M 满足下面公式：

(a) $K \subset K \cup L$ 而且 $K \supset K \cap L$，

(b) $K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$ 而且 $K \cup (L \cap M) = (K \cup L) \cap (K \cup M)$，

(c) $(K')' = K$，

(d) $(K \cup L)' = K' \cap L'$ 而且 $(K \cap L)' = K' \cup L'$。

公式(a)叫做（类的加法与乘法的）簡化定律；公式(b)的上半，叫作（关于加法的类的乘法的）分配律，公式(b)的下半，叫作（关于乘法的类的加法的）分配定律。公式(c)是两重余类的定律；公式(d)是类的理論方面的摩根定律。① 上面的定律中哪些和算术定理相当？

提示：例如，为了要证明公式 (d) 的第一部分，只要指出 $(K \cup L)'$ 与 $K' \cap L'$ 是由完全相同的元素构成就够了（参看 §24）。为了这个目的，我們必須应用 §25 的定义，弄明确甚么时候一个事物 x 屬于类$(K \cup L)'$，甚么时候 x 屬于 $K' \cap L'$。

*14. ㊂㊃ 在 §12，§13 与第 (II) 章的习題 14 中所讲的語句演算定律，与在 §24，§25 以及前面 13 題中所讲的类的运算的定律之間，在結构上存在着极大的相似（它們名称的类似就指出了这点）。詳細說明甚么地方相似，并且对这种現象給予普遍的說明。

在 §14 中，我們知道了語句演算的逆反定律；試作出类的运算方面的类似的定律。

---

① 参看第 50 頁第（II）章练习 14 的注①。

15. 用 §22 中所引入的符号：

$$\underset{x}{\mathbf{C}}$$

我們可以将两类之和的定义写成：

$$K\cup L=\underset{x}{\mathbf{C}}[(x\in K)\vee(x\in L)];$$

但是，也可以用通常的等值式的形式（不用 $\underset{x}{\mathbf{C}}$ 这个符号）将这个定义表示如下：

$$[x\in(K\cup L)]\leftrightarrow[(x\in K)\vee(x\in L)]。$$

試同样用这两种办法来表示全类的定义、空类的定义、两类之积的定义、一类的余类的定义。

*16. 有沒有这样一个多角形，它的所有边的集合与它的所有对角綫的集合是等数的？

*17. 只用邏輯范圍中的語詞，作出下列表达式的定义：

(a) K 类是由两个元素构成的，

(b) K 类是由三个元素构成的。

*18. 考虑下列三个集合：

(a) 所有大于 0 又小于 4 的自然数的集合，

(b) 所有大于 0 又小于 4 的有理数的集合，

(c) 所有大于 0 又小于 4 的无理数的集合，

哪些是有穷集合，哪些是无穷集合？試另外举出几个关于数的有穷集合与无穷集合的例子。

(V) 关系的理論

§27. 关系，关系的前域与关系的后域；关系与有两个自由变項的語句函項

在前几章中，我們已經談到事物間的一些关系。作为两个事物間的关系的例子，我們可以举出同一（相等）与相異（不相等）。有时，我們可以将公式：

$$x=y$$

讀成：

x 与 y 有同一关系

或

x 与 y 之間有同一关系，

并且我們說“＝”表示同一关系。同样，有时候我們把公式：

$$x \neq y$$

讀成：

x 对 y 有相異关系

或

x 与 y 之間有相異关系，

并且我們說“≠”表示相異关系。此外，我們还談到过类与类之間的某些关系，例如，包含关系，相交关系，不相交关系等等。現在，我們要来討論一些屬于一般的关系理論的概念。关系的理論，是邏輯中的一个专門的而且非常重要的部分；关系的理論研究带有完全任意性质的关系，并且确立关于这些关系的一般定律。①

① 摩根与皮尔斯（参看第 12 頁 §5 注①和第 50 頁第（II）章练习 14 注①）首先发展了关系理論，特别是发展了关系理論中叫作关系演算的这一部分（参看 §28）。德国

为了便于討論，我們引入变項“R”，“S”；…以表示关系。我們可以将：

事物 x 与事物 y 有 R 关系

簡写成：

$$xRy,$$

又可以将：

事物 x 与事物 y 沒有 R 关系，

写成（应用語句演算中的否定符号，参看 §13）：

$$\sim(xRy)。$$

任何一个与某一事物 y 有 R 关系的事物，叫作 R 关系的前趋（predecessor）；任何适合

$$xRy$$

中的 y 的事物，叫作 R 关系的后继（successor）。由所有 R 关系的前趋构成的类，叫作 R 的前域（domain），由所有 R 关系的后继构成的类，叫作 R 的后域（counter domain 或 converse domain）。例如，任何事物都既是同一这个关系的前趋，又是同一这个关系的后继。因而，同一关系的前趋与后继，都是全类。

在关系理論中，正如在类理論中，我們可以区分不同級的关系。第一級关系就是个体之間的关系。第二級关系就是第一級关系与第一級关系之間的关系，或第一級类与第一級类之間的关系；其余可以类推。在这里，情形是更为复杂的。因为，我們常常要研究到“混合的”关系，这种混合关系的前趋，例如說，是个体，而它的后继是类，或者，前趋是第一級类，而它的后继是第二級类。混合

邏輯家习玉德系統地扩充和完成了这种理論。习玉德的《关系的代数与邏輯》（Algebra und Logik der Relative, Leipzig 1895）这本书［这是他的更大的著作：《关于邏輯的代数学》（Vorlesungen über die Algebra der Logik）一书中的第三卷］至今还是一本仅有的詳細討論关系演算的书。

关系中的最重要的例子，就是那种存在于一个元素与这个元素所屬的类之間的关系。我們还記得，这种关系在 §21 中，是用"ϵ"表示的。和在討論类理論时一样，我們現在主要也只討論第一級关系；然而，这里所討論的概念可以应用于，并且在少数情形下将被应用于更高級的关系。

我們假定，对于每一个具有两个自由变項 x 与 y 的語句函項，相应地，有一种存在于事物 x 与 y 之間的关系，当且仅当 x 与 y 滿足这个語句函項。就这一点而說，我們說：一个具有自由变項 x 与 y 的語句函項，表示一种 x 与 y 之間的关系。例如，下面这个語句函項：

$$x+y=0$$

表示具有正負相反符号的关系 (having the opposite sign)，或簡单地說，正負相反的关系；数 x 与数 y 就有正負相反的关系 (the relation of being opposite) 当且仅当 $x+y=0$。如果我們用符号"○"表示这种关系，那么，公式：

$$x \bigcirc y$$

与

$$x+y=0$$

就是等值的。同样，任何只包含自由变項 x 与 y 的語句函項都可以变成一个具有

$$xRy$$

形式的等值的公式，其中 R 是一个指示某种关系的常項。因此，正如同公式

$$x \epsilon K$$

可以看作是包含一个自由变項的語句函項的普遍形式一样，公式

$$xRy$$

可以看作是包含两个自由变項的語句函項的普遍形式(参看§22)。

§28. 关系的运算

关系理論是数理邏輯中高度发展的分支之一。关系理論的一个部分——关系运算与类的运算相似；它的主要对象是建立有关关系运算的定律，用这些运算定律，可以由一些給定的关系，构造出另一些关系来。

在关系运算中，我們首先要考虑到的是一組概念，这一組概念与类的运算中的概念完全类似；而关于这一組概念的定律也同类的演算中的定律十分相似。我們常常用类的运算中的符号去表示这組概念。(当然，为了避免混同起見，我們也可以在关系运算中采用另一組符号，例如，我們可以把类的运算中的每一个符号，都加上一个点，而将这些加了点的符号用作关系运算中的符号。)

因此，在关系运算中我們有两种特别的关系，即：全关系$\vee$与空关系$\wedge$；全关系为任何两个事物之間所有，空关系不为任何两个事物所有。

其次，关系与关系之間有各种关系，例如，包含关系。如果，任何时候两个事物間有关系R，这两事物間就有关系S，那么，我們就說：关系R包含于关系S；换言之，对于任何x与y，如果公式：

$$xRy$$

蘊函

$$xSy,$$

那么，关系R就包含于关系S，用符号表示，就是：

$$R\subset S。$$

例如，从算术中，我們知道：任何时候

$$x<y,$$

那么，

$$x \neq y。$$

因此，小于这个关系就包含于不等这个关系。

如果同时

$$既\ R \subset S\ 而且\ S \subset R,$$

也就是說，如果关系 R 与关系 S 存在于那些同一的事物之間，那么，R 与 S 就是同一的，即

$$R=S。$$

其次，还有两个关系 R 与 S 之和，用符号表示，即：

$$R \cup S。$$

和两个关系 R 与 S 之积或交，用符号表示，即：

$$R \cap S。$$

两个事物間就 $R \cup S$ 关系，当且仅当这两个事物間至少有关系 R 与 S 中之一，换言之，公式：

$$x(R \cup S)y$$

与

$$xRy\ 或\ xSy$$

是等值的。同样，两个关系之积也可以这样加以定义，只是把“或”这个詞换成“而且”这个詞。例如，如果 R 是父子关系，S 是母子关系，那么，$R \cup S$ 就是亲子关系，而 $R \cap S$ 却是一个空类。

最后，还有一个关系 R 的否定关系或余关系，这用符号表示如下：

$$R'。$$

R' 存在于两个事物之間，当且仅当一个关系 R 不存在于这两个事物之間。换言之，对于任何 x 与 y，公式

$$xR'y$$

与公式

$$\sim(xRy)$$

是等值的。应当注意，如果一个关系是一个常項，那么，就常常在这个常項符号上划上一直横或一斜横去表示这个关系的余关系或否定。例如，关系$<$的否定，常用“$\nless$”去表示，而不用“$<'$”去表示。

在关系运算中，也出現一些完全新的，和类的运算中的概念不相似的概念。

这里，首先有两个特别的关系，即个体間的**同一关系**与**相異关系**（这两者恰恰是我們在前面已附带地讲到过的）。在关系运算中，这两种关系就用特别的符号“$\mathbf{I}$”与“$\mathbf{D}$”来表示（而不用邏輯中其他部分所用的“$=$”与“$\neq$”来表示）[三][五]。这样，我們就将它們写成：

$$x\mathbf{I}y \text{ 与 } x\mathbf{D}y,$$

而不写成：

$$x=y \quad \text{与} \quad x\neq y。$$

符号“$=$”与“$\neq$”在关系运算中，只是用来表示关系与关系之間的同一与相異的。

这里，我們还有一个引人注意的而且重要的新运算，应用这个运算，我們能够从两个关系 R 与 S 得到第三个叫作 R 与 S 的**相对积**这样的关系（为了同相对积区別，通常的 R 与 S 的积，就叫作**絕对积**）。R 与 S 的相对积，用符号表示为：

$$R/S;$$

x 与 y 之間有关系 R/S，当且仅当有一个 z 使得

$$xRz \text{ 而且 } zSy。$$

例如，令 R 为是丈夫关系，S 为是女儿关系。如果有一个人 z，而

x是z的丈夫，z是y的女儿，那么，x与y之間有R/S关系，而R/S关系也就是女婿关系。此外，我們还有一种具有类似性质的运算，它叫作两个关系的相对和。这个运算并不起重大的作用，因此这里我們也就不給它下定义了。

最后，还有一种运算（它与作出R'的那种运算相类似），应用这种运算，我們能够从一个关系R得到一种叫做R的逆关系的新关系。这种关系用符号表示就是：

$$\breve{R}。$$

$\breve{R}$存在于x与y之間，当且仅当R存在于y与x之間。如果一个关系是用一个常項表示的，那么，要表示这个关系的逆关系，我們就常常把这个常項写成相反的方向。例如，关系$<$的逆关系，就是关系$>$，因为，对于任何x与y，公式

$$x<y$$

与公式

$$y>x$$

是等値的。

考虑到关系运算的頗为专門的性质，我們在这里就不再进一步詳細討論它了。

§29. 关系的一些性质

現在我們要轉到关系理論的另一个部分，在这个部分中，我們要提出并且研究一些在其他科学中，特别是在数学中，常常碰見的特别的关系。

如果K类中的每一个元素都与它自己有关系R，我們就說，关系R在K类中是自反的；用符号表示，就是：

$$x R x;$$

如果 K 类中沒有一个元素与它自己有关系 R，即

$$\sim(xRx),$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是不自反的。如果对于 K 类中任何两个元素，公式

$$xRy$$

蘊函公式

$$yRx,$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是对称的。但是，如果公式

$$xRy$$

蘊函

$$\sim(yRx),$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是不对称的。如果对于 K 类中的任何三个元素 x, y 与 z 而說，条件

$$xRy \text{ 而且 } yRz$$

永远蘊函

$$xRz,$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是傳遞的。最后，如果对于 K 类中任何两个元素 x 与 y，下面两个公式

$$xRy, \quad yRx$$

中至少有一个是眞的，也就是說，如果关系 R 至少以一个方向存在于 K 类中任意两个不同元素之間，那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是連通的。

如果 K 是一个全类（或者，至少，是我們所研究的那一門科学的論域，參看 §23），为了簡单起見，我們常常不說：某关系在 K 类中是自反的、对称的，等等，而只說：它是自反的、对称的，等等。

§30. 自反的，对称的与傳递的关系

上面所說的那些关系的性质，常常联合在一起出現。例如，常常有一些关系，它們既是自反的，又是对称的，又是傳递的。典型的例子，就是同一关系。§17 的定律 (II)，就是表示同一关系是自反的，定律(III)表示同一关系是对称的，定律(IV) 表示同一关系是傳递的（这也說明何以我們給 §17 所讲的那些定律以这样的名称）。在几何中可以找到这类关系的許多其他例子。在一个綫段的集合中，例如，全等是一个自反的关系，因为每一个綫段都与它自己全等。全等又是对称的，因为，如果綫段 A 与綫段 B 是全等的，那么，綫段 B 与綫段 A 是全等的。同时，全等还是傳递的，因为，如果綫段 A 与綫段 B 是全等的，而且綫段 B 与綫段 C 是全等的，那么，綫段 A 与綫段 C 是全等的。多角形間的相似，直綫間的平行（假定任何直綫都与它自己平行）都具有上面所說的三个性质。在几何范圍之外，人与人間的年岁相同关系，字与字間的同义关系，也都具有上面所說的三个性质。

我們可以将每一个同时是自反的、对称的与傳递的关系看作是某一种相等。因此，我們可以不說：两个事物間有那样一种关系，而說：这两个事物在某个方面是相等的，或者，更准确地說：这两个事物的某个性质是同一的。这样，我們可以把两个綫段是全等的，或，两个人是同样年龄的，或者，两个字是同样意义的这些說法，分別換成：这两个綫段在长度方面是相等的，这两个人的年龄是相同的，这两个字的意义是同一的。

*我們用一个例子来說明，怎样我們可以为上面那种表达方式建立一个邏輯的基础。为此，我們且考虑多角形間的相似关系。我們把由所有相似于一个給定的多角形 P 的多角形所构成的集

合称为多角形 P 的外形(或者,用較为流行的术語說,我們将这个共同的性质称为多角形 P 的外形,这个共同性质是所有相似于多角形 P 的多角形所都具有而其他的多角形所都沒有的)。这样,不同的外形就是多角形的某种不同的集合(或者說,是多角形的某种不同的性质,参看 §22 末尾的說明)。上面已經讲过,相似关系是自反的、对称的与傳递的。根据这点,我們現在很容易說明:每一个多角形屬于,并且仅仅屬于一个这样的集合,两个相似的多角形屬于同一个集合,两个不相似的多角形屬于不同的集合。由此,我們就可以推出:公式

多角形 P 与 Q 是相似的

与公式

多角形 P 与 Q 有相同的外形(即是說,P 与 Q 的外形是同一的)

是等值的。

讀者将会注意到,在以前的討論过程中,我們已經用了类乎这样的办法,即是在 §26 中,我們将表达式:

K 类与 L 类是等数的

变为和它等值的表达式:

K 类与 L 类有同一的基数。

我們不难說明,同样的办法可以应用于任何自反的、对称的与傳递的关系㊂㊅。甚至还有一个叫作**抽象原則**(principle of abstraction)的邏輯定律,它給上面的办法提供一个普遍的理論基础,但是,这里我們不想对这个原則作精确的討論。*

直到現在,还沒有一个普遍接受的术語来表示所有那些既是自反的、又是对称的与傳递的关系。有时候,我們一般地将这样的关系叫作**相等**或**等值**(equalities 或 equivalences)。但是,"相等"

这个語詞，有时是用来表示我們这里所說的这一类关系中的某些特殊的关系，因而，如果两个事物之間有这样的一种特殊的关系，那么我們就說，这两个事物是相等的。例如，在几何中，如我們在§19已經指出，全等的綫段，常常叫作相等的綫段。这里，我們再一次强調，最好根本避免用这样的說法；这样的說法会产生含混，并且它違反了我們将“相等”与“同一”看作同义字的这个規定。

§31. 序列关系；其他关系的例子

另一类常見的关系，就是那些在一个給定的类K中不对称的、傳递的与連通的关系（可以很容易看到，这样的关系也必然是在K类中不自反的）。我們說：一个具有这些性質的关系，**在K类中确立一个序列**；我們也說：**关系R将K类排成一个序列**[37]。例如，小于这个关系（或，我們偶然也会說，**少于**这个关系），它在任何数的集合中都是不对称的，因为，如果x与y是任何两个数，又如果

$$x<y,$$

那么，

$$y \nless x, \text{也就是說} \sim(y<x);$$

小于这个关系是傳递的，因为，公式

$$x<y \text{ 而且 } y<z$$

蘊函

$$x<z;$$

最后，小于这个关系是連通的，因为，在任何两个不同的数中，总有一个数小于另一个。（而且小于也是不自反的，因为，沒有一个数小于它自已。）因此，小于这个关系将任何数的集合排成一个序列。同样，大于这个关系也表示了任何数的集合的另一种序列关系。

现在让我們来考虑老于这个关系。我們很容易证明：老于这个关系，在任何一个給定的人的集合中是不自反的、不对称的而且傳递的。但是，它却不一定是連通的；因为，可以有这样的情形，在这一个集合中，包含两个恰恰是同一年岁的人，也就是說，他們是在同一个时刻出生的，并因此老于这个关系就不在任何方向下存在于他們之間。另一方面，如果我們所考虑的是这样一个集合，在这个集合中沒有两个年岁完全相同的人，那么，老于这个关系便在那个集合中建立起一个序列。

还有許多关系，既不屬于自反的、对称的与傳递的关系这一个范疇，也不屬于不对称的、傳递的与連通的关系这一个范疇。让我們来考虑几个例子。

相異这个关系在任何集合中都是不自反的，因为沒有一个事物不同于它自己；相異这个关系是对称的，因为，如果

$$x \neq y,$$

那么，

$$y \neq x;$$

相異关系不是傳递的，因为公式：

$$x \neq y \text{ 而且 } y \neq z,$$

并不蘊函：

$$x \neq z。$$

相異关系是連通的，这一点是很容易明白的。

根据同一定律与一条三段論定律(参看 §24)，我們知道，类与类間的包含关系是自反的与傳递的；又我們知道，包含关系既不是对称的，也不是不对称的，因为，公式：

$$K \subset L$$

既不蘊函，也不排除

$$L \subset K$$

当且仅当 K 类与 L 类是同一的，那么，$K \subset L$ 与 $L \subset K$ 才同时是眞的；）最后，我們很容易知道，包含不是連通的。这样，包含这个关系的性质，同前面所讲过的那些关系的性质都不同。

§32. 一多关系或函項

現在我們要比較詳細地討論另一类特別重要的关系。如果对于每一个事物 y，至多有一个事物 x，使得 xRy，换言之，如果公式

$$xRy \text{ 而且 } zRy$$

蘊函

$$x=z,$$

那么，关系 R 就叫作**一多关系**或者**函項关系**，或者，簡单地叫作一个**函項**。关系 R 的后继，就是这样的一些事物 y，对于这些 y 确实有一些事物 x，使得

$$xRy;$$

关系 R 的后继，叫作关系 R 的**主目值**；关系 R 的前趋叫作关系 R 的**函項值**，或者，簡单地叫作**函項** R 的**值**。令 R 是一个任意的函項，y 是函項 R 的任何一个主目值，那么，那个相应于主目值 y 的唯一的函項值 x，我們就用符号“$R(y)$”来表示。因而，我們用

$$x=R(y)$$ [38]

去代换

$$xRy。$$

一般地，特别是在数学中，已經成为一个习惯，我們不用变項“R”，“S”，…而用别的字母如“f”，“g”…去表示函項关系，因此，我們常常可以看到这样的公式，如：

$$x=f(y),\qquad x=g(y),\cdots;$$

公式：

$$x=f(y)$$

可以讀成：

函項 f 对于主目值 y 指定值 x，

或者讀成：

x 是那个相应于主目值 y 的函項 f 的值。

（另外也有一种习慣，用变項“x”去指主目值，用“y”去指函項值。我們将不遵守这种习慣。我們还是用“x”去指函項值，用“y”去指主目值，因为这样可以便于与关系理論中所用的一般符号联系起来。）

在許多初等代数教科书中，我們发現，关于函項概念的定义与这里所用的定义很不同。在那些教科书中，函項关系被表述为是一种两个“变”量或“变”数間的关系，即，被表述为是“自变項”与“应变項”間的关系；自变項与应变項是互相依賴的：如果自变項变了，应变項也跟着变。这种定义今天已經不該再用了，因为它們經不起任何邏輯的批判。从前有过一个时期，有人企图分别“常”量与“变”量（参看 §1），这种定义是这个时期遺留下来的东西。但是，如果一个人想既合乎近代科学的要求，又不完全打破傳統，他可以保留旧术語，而在語詞“主目值”与“函項值”之外，再用“自变項值”与“应变項值”这样的表达式。

函項关系的最簡单的例子，就是通常的同一关系。作为日常生活中的一个函項的例子，我們可以举下列語句函項所表示的关系为例：

x 是 y 的父亲。

这是一个函項关系，因为，对于任何人 y，只有一个人 x，这个人是

y 的父亲。为了表明出这个关系的函項性质，我們可以在上面的表述中加一个“那”字，即：

x 是那 y 的父亲，

代替这个表达式，我們也可以說：

x 是和那 y 的父亲同一的。

这一种，用加一个有定冠詞“那”来改变原来那个表达式的方法，在日常語言中所起的作用，正和我們在符号表述中从公式

$$xRy$$

轉換到

$$x=R(y)$$

所起的作用是相同的。

函項这个概念，在数学科学中起着最重大的作用。高等数学中有些分支，是专門来研究某种函項关系的。但是，在初等数学，特别在代数与三角中，我們也发現大量的函項关系。下面这些公式所表示的关系，就是函項关系：

$$x+y=5$$

$$x=y^2$$

$$x=\log_{10}y$$

$$x=\sin y,$$

其他还有許多。让我們比較仔細地研究一下上面的第二个公式。对于每一个数 y，只有一个相应的数 x，使得 $x=y^2$。这样，这个公式就表示了一种函項关系。这个函項的主目値是一些任意数，然而这个函項的値，却是一些非負数。如果我們用符号“f”表示这个函項，公式：

$$x=y^2$$

就具有这样一个形式：

$$x=f(y)。$$

显然地，这里的"x"与"y"可以用指示确定的数的符号来代换。例如，由于

$$4=(-2)^2,$$

我們就可以断言：

$$4=f(-2)。$$

这样，4 就是相应于主目值 -2 的函項值。

另一方面，在初等数学中，我們也碰到許多不是函項的关系。例如，小于这个关系就不是一个函項，因为，对于每一个数 y，有无穷多的数 x，使得

$$x<y。$$

又，公式

$$x^2+y^2=25$$

所表示的数 x 与数 y 間的关系，也不是一个函項关系，因为，对于同一个数 y，可以有两个不同的数 x 满足这个公式；例如，对于数 4，就有两个相应的数 3 与 -3。应当注意：像上面这个关系那样，在有些由方程式所表示的数与数的关系中，一个 y 同两个或两个以上的 x 相应；这样的关系，在数学中有时候被称作二值函項或多值函項（以别于单值函項或普通意义下的函項）。然而我們觉得，将这种关系叫作函項，似乎是不妥当的，至少在初等数学中是不妥当的，因为，这样就会抹杀函項这个概念与关系这个更为普遍的概念之間的本质区别。

就数学在經驗科学中的应用說，函項有特别的重要性。每当我們研究客观世界中两种量間的依賴关系时，我們就力求給这种依賴关系一个数学公式，这个数学公式使我們能够用一种量来精确地决定另一种量。这样一个公式就表示两种量之間的某些函項

关系。让我們举物理学中一个有名的公式作为例子：

$$s=16.1\,t^2;$$

这个公式表示自由下落的物体所經过的距离 s 对于它的下落时間 t 的依賴关系（距离以呎为单位，时間以秒为单位）。

*在結束我們关于函項关系的討論时，我們要着重指出，这里所讲的函項这个概念是与 §2 中所讲的語句函項与指示函項有本質的不同的。严格地說，“語句函項”与“指示函項”这些語詞，并不屬于邏輯或数学的范圍；这些語詞表示某种表达式，这种表达式可以用来帮助构成邏輯与数学公式，但是，这些表达式本身并不表示这些邏輯与数学公式所研究的事物（参看 §9）。但是，我們这里所讲的新的意义下的“函項”，却是一个純粹的邏輯性質的表达式，它表示邏輯与数学所研究的某一类型的事物。无疑，在这些概念之間是有联系的；这种联系大体上可以这样来表述：如果用符号“＝”把变項“x”和一个只包含变項“y”的指示函項（例如，“y^2+2y+3”）联結起来，那么，所得出的公式（它是一个語句函項）：

$$x=y^2+2y+3$$

就表示一个函項关系；或者說，存在在那些，并且仅仅在那些滿足于这个語句函項的数 x 与 y 之間的关系是一种这里所說的新的意义下的函項。这就是这些概念常常混淆的理由之一。*

§33. 一一关系或一一函項与一一对应

在函項关系中，应当特別注意所謂**一一关系**或**一一函項**。一一关系或一一函項是这样的函項关系，在这种关系中，不仅对于每一个主目值 y，只有一个相应的函項值 x，而且对于每一个函項值 x，也只有一个相应的主目值 y。也可以这样来定义：包含变項 x 与 y 的一一关系或一一函項，就是这样的关系，不但在这些关系本

身中 x 对 y 是一多关系，而且在它們的逆关系中（参看§28），y 对 x 也有一多关系。

如果 f 是一个一一函項，K 是由主目值构成的一个任意类，而 L 是由和 K 的元素相应的函項值所构成的类，那么，我們就說：函項 f 以一一对应的方式把 K 类映射在 L 类上，或者說：函項 f 建立了 K 的元素与 L 的元素之間的一一对应。

让我們研究几个例子。假定有一条从 O 点引出的半綫，綫上划出一綫段作为长度的单位。又，令 Y 是在半綫上的任何点。于是，我們就可以度量綫段 OY，也就是說，我們可以給 OY 一个相应的非負数 x，x 叫作綫段 OY 的长度。因为这个数 x 完全依賴于点 Y 所在的地位，我們可以用符号“$f(Y)$”去表示它。因而，我們就得出：

$$x=f(Y)。$$

但是，反过来，对于任何一个非負数 x，我們也可以在半綫上划出一条唯一的确定的綫段 OY，使得它的长度等于 x。换言之，对于每一个 x，恰恰只有一个点 Y 与之对应，使得

$$x=f(Y)。$$

因此，函項 f 是一一函項。它在半綫上的点与非負数之間建立了一个一一对应的关系（也可以在整个綫的点与所有实数之間建立一个一一对应）。另外一个例是下面这个公式所表示的关系：

$$x=-y。$$

这是一个一一函項，因为，对于任何数 x，只有一个数 y 滿足这个公式；很容易看出，这个函項在由所有正数构成的集合与由所有負数构成的集合之間建立了一个一一对应。作为最后一个例，我們举出下面这个公式所表示的关系：

$$x=2y,$$

假定符号"y"在这里只表示自然数。这又是一个一一函項；这个函項使得对于任何自然数 y，有一个偶数 $2y$ 与之对应；同时，对于每一个自然数的偶数 x，恰恰有一个数 y 与之对应，使得 $2y=x$，即是，$y=\frac{1}{2}x$。这样，这个函項在任意自然数与偶数的自然数之間建立了一个一一对应的关系。——从几何范圍內，我們可以举出許許多多的一一函項的例子(对称、共綫的映射等等)。

*由于我們有了一一对应这样一个概念，現在，我們就能够給我們在前面曾經直觉地但并不是严格地表述过的那个語詞下一个精确的定义。它就是等数类这个概念(参看§26)。現在，我們可以說：如果有一个函項，它在 K 类的元素与 L 类的元素之間建立了一个一一对应的关系，那么，K 类与 L 类就是等数的，或者說，K 类与 L 类有相同的基数。根据这个定义，結合前面所举的例子，我們就可得出：一个任意半綫上的所有点的集合与所有非負数的集合是等数的；同样，正数的集合与負数的集合是等数的，所有自然数的集合与所有偶数的自然数的集合是等数的。最后的那个例子，是特別有意义的，因为这个例子表示了一个类可以同它的眞正子类是等数的。对于許多讀者，这个事实初看起来似乎是很詩謬的，因为，平常我們总是用两个有穷类来互相比較它們的元素的数目，而一个有穷类的确总是比它的任何部分具有較大的基数。但是，如果我們想到：自然数的集合是无穷集合，而我們不能把完全是从观察有穷集合所得出的性质，加之于无穷集合，那么，这个詩謬的情况就不存在了。值得提出的是：自然数的集合同它的一个部分等数这样一个性质，是任何无穷集合所共有的。这个性质，因此，可以作为无穷集合的特点，我們可以根据这个特点而分別无穷集合与有穷集合；一个有穷集合可以簡单地定义为是一个类，这个类同它的任何眞正子类不是等数的。(虽然，这个定义会产生一些

邏輯上的困难，我們在这里不加討論。）①*

§34. 多項关系；包含几个变項的函項与运算

直到現在，我們只是討論了两項关系，即是，只討論了在两个事物間的关系。然而，我們在各門科学中常常会碰到三項与多項关系。例如，在几何中，“在…之間”这个关系，就是一个典型的三項关系。“在…之間”这个关系存在于一条綫上的三个点之間，用符号表示就是：

$$A/B/C,$$

它可以讀为：

B 点是在 A 点与 C 点之間。

算术也提供了許多三項关系的例子；在三个数 x、y 与 z 之間的关系，如

$$x=y+z$$

就是一个三項关系。同样，公式：

$$x=y-z$$

$$x=y\cdot z$$

$$x=y:z$$

都是三項关系。

下面这个关系，就是一个四項关系的例子，即：A, B, C, D 之間的关系是一个四項关系当且仅当 AB 的距离等于 CD 的距离，也就是説，如果綫段 AB 与綫段 CD 全等。另外一个四項关系的

① 第一个引起人們注意我們这里所討論的无穷集合的性质的，是德国哲学家与数学家波察諾(B. Bolzano, 1781—1848)。在他的书《无穷的誖論》(萊比錫, 1851)里，我們已經看到近代集合論的萌芽。后来皮尔斯（参看第 12 頁 §5 注①）与一些别人用上面所説的那个性质去定义有穷集合与无穷集合。

例子，就是数 x、y、z、t 有这样一个比例关系：

$$x : y = z : t。$$

在多項关系中，具有特别重要性的是那些相当于二項函項关系的多項函項关系。为了簡单起見，我們只限于討論这类多項关系中的三項关系。如果对于任何两个事物 y 与 z，至多只有一个相应的 x，使得 x 对 y 与 z 有 R 关系，那么，R 关系就叫作一个三項函項关系。这个唯一地确定的事物，假如它存在的話，我們或者用符号

$$R(y, z)$$

或者用符号

$$yRz$$

去表示它（yRz 在这里的意义和它在二項关系里的意义不同）。这样，要表示 x 对 y 与 z 有函項关系 R，我們有下面两个公式可以应用：

$$x=R(y, z) \text{ 与 } x=yRz。$$

相应于上面这两个公式，我們有两种說明的方法。当我們用公式

$$x=R(y, z)$$

时，我們就将 R 叫做函項。为了分别二項函項关系与三項函項关系，我們将前者叫作有一个变項的函項或有一个主目的函項，而将后者叫作有两个变項的函項或有两个主目的函項。同样的，四項的函項关系，就叫作有三个变項的函項或有三个主目的函項，其余类推。在表示包含任何数目的主目的函項时，我們习慣用变項"f"，"g"，…；公式：

$$x=f(y, z)$$

讀成

x 是那个相应于主目値 y 与 z 的函項 f 的値

当我們用公式：

$$x = yRz$$

时，关系 R 常常被看作一个运算，或者，更明确一点，看作一个二元运算，上面的公式，就讀成：

x 是施运算 R 于 y 与 z 的結果；

在这句句子里，在"R"这个字母的位置上，我們傾向于用別的字母，特別是用字母"O"。算术的四个基本运算：加法、减法、乘法与除法，可以作为例子；同样，如像类与关系的加法与乘法这样一些邏輯运算，也可以作为例子（参看§25 与 §28）。有两个变項的函項这个概念，与二元运算这个概念，內容上显然是完全相同的。也許应当說一下，有一个变項的函項，有时也叫作运算，詳細点說，叫作一元运算。例如，在类的运算中，一个类的余，通常不看作是一个函項，而看作是一个运算。

虽然多項关系在各門科学中起着重要的作用，但是，多項关系的普遍理論，还是在剛开始研究的阶段。当我們說到一个关系或关系的理論时，通常我們在心里所指的，只是二項关系。直到現在，我們只对三項关系中的一个特殊的范疇，即二項运算的范疇进行过比較詳細的研究。这种运算的典型例子，就是算术的加法。对于这方面的研究是由一門特別的数学理論——群論——所担負的。在本书的第二部分，我們将要讲到群論中的一些概念，这样，也就要讲到二元运算的某些一般性质。

§35. 邏輯对其他科学的重要性

上面我們討論了現代邏輯的一些最重要的概念，并且，在討論中，熟悉了一些（当然只是很少一些）有关这些概念的定律。但是

本书的目的并不是要把我們在科学論证中所应用的一切邏輯概念和定律都无遺地列举出来。就其他科学，甚至就和邏輯关系最密切的数学科学的研究和提高說，这也是不必要的。邏輯被正当地认为是一切其他科学的基础，我們只要举出一个理由：在每一个論证中我們都应用取自邏輯范圍的概念，每一个正确的推論都要遵循邏輯的定律来进行。但这并不等于說，要能正确思想就必須完全精通邏輯；即使职业数学家，他們一般不会犯推論的錯誤，常常也并不是对邏輯熟悉到这样的地步，以致能意識到他們所不自觉地应用的一切邏輯定律。虽然这样，但是，邏輯知識对于每一个希望正确地思想和推理的人无疑具有很大的实际重要性，因为它能够提高我們这方面的先天和习得的能力，并且在特別繁复細致的問題中，防止我們犯邏輯的錯誤。至于专門就数学定理的构造来說，那末，从理論观点来看，邏輯更起着非常重要的作用；关于这个問題我們在下一章討論。

练　习

1. 从算术、几何、物理和日常生活中，举出一些关系的例子。

2. 考虑“是父亲”这个关系，即是，考虑下面語句函項所表示的关系：

x 是 y 的父亲。

是否所有人都屬于这个关系的前域？是否所有人都屬于这个关系的后域？

3. ㊂㊈ 考虑人与人間的七种关系，即是，是父亲、是母亲、是孩子、是兄弟、是姐妹、是丈夫、是妻子。我們用符号“**F**”、“**M**”、“**C**”、“**B**”、“**S**”、“**H**”、“**W**”分别表示这七种关系。将 §28 中所定义的各种运算用到上面这些关系上去，我們就得出一些新的关系，这些新

的关系在日常語言中常常有一个簡单的名称；例如，“H/C”就表示是女婿这个关系。找出下列关系在日常語言中的簡单名称：

$$\breve{\mathbf{B}}, \breve{\mathbf{H}}, \mathbf{H}\cup\mathbf{W}, \mathbf{F}\cup\mathbf{B}, \mathbf{F}/\mathbf{M}, \mathbf{M}/\breve{\mathbf{C}}, B/\breve{\mathbf{C}},$$
$$\mathbf{F}/(\mathbf{H}\cup\mathbf{W}), (\mathbf{B}/\breve{\mathbf{C}})\cup[\mathbf{H}/(\mathbf{S}/\breve{\mathbf{C}})]。$$

用符号“**F**”，“**M**”，…等等，并加上关系演算的符号来表示：是父母，是兄弟姐妹，是孙子，是媳妇，是岳母这些关系。

說明下面公式的意义，并指出哪些公式是眞的：

$$\mathbf{F}\subset\mathbf{M}', \breve{\mathbf{B}}=\mathbf{S}, \mathbf{F}\cup\mathbf{M}=\breve{\mathbf{C}}, \mathbf{H}/\mathbf{M}=\mathbf{F}, \mathbf{B}/\mathbf{S}\subset\mathbf{B},$$
$$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}/\breve{\mathbf{C}}。$$

4. ⓐⓣ 考虑下面两个关系演算的公式：

$$R/S=S/R \text{ 与 } \breve{(R/S)}=\breve{S}/\breve{R}。$$

試用一个例子来表示，第一个公式并不总是眞的。并試证明：任意两个关系 R 与 S 都滿足第二个公式。

提示：考虑一下，說关系 $\breve{(R/S)}$（即关系 R/S 的逆关系）或关系 $\breve{S}/\breve{R}$ 存在于两个事物 x 与 y 間，这是甚么意思。

5. 試用符号表述 §28 中所討論的一切关系演算的語詞的定义。

提示：例如，两个关系之和的定义，就是下面这样的形式：

$$[x(R\cup S)y]\leftrightarrow[(xRy)\vee(xSy)]。$$

6. §29 中所討論的那些关系的性质中，有哪些是下列諸关系所具有的：

(a) 自然数集合中的相異关系；

(b) 自然数集合中的互素关系（如果两个自然数的最大公因子是 1，那么，这两个自然数就叫作互素）；

(c) 多角形的集合中的全等关系；

(d) 綫段集合中的长于关系；

(e) 一个平面上的直綫的集合中的垂直关系；

(f) 几何图形的集合中的相交关系；

(g) 物理事件的类中的同时关系；

(h) 物理事件的类中的时間在先关系；

(i) 人类中的亲戚关系；

(j) 人类中的父子关系。

7. 每一个关系，在一个給定的类中，或者是自反的或者是不自反的；或者是对称的或者是不对称的；这句話对嗎？举例說明。

8. 如果，对于 K 类中的任何三个元素，x、y、z，公式

$$xRy \text{ 而且 } yRz$$

蘊函：

$$\sim(xRz),$$

那么，我們就說：关系 R 在 K 类中是**不傳遞的**。

在上面习題 3 与习題 6 所列举的关系中，哪些是不傳遞的？試另外再举几个不傳遞关系的例子。是否任何一个关系或者是傳遞的或者是不傳遞的？

*9. 說明如何将表达式：

綫 a 与綫 b 是平行的，

变换为下面这个等值的表达式：

綫 a 的方向与綫 b 的方向是同一的。

并說明，在这里如何定义"一条綫的方向"。

又，說明如何将表达式：

綫段 AB 与綫段 CD 是全等的

变换为下面这个等值的表达式：

綫段 AB 的长与綫段 CD 的长是相等的。

并說明这里如何定义"一个綫段的长"。

指出这里需要应用那一条邏輯定律？

提示：参照 §30 所談相似这个概念。

10. 让我們将两个符号或由几个符号所构成的两个表达式叫作同形的(equiform)，如果它們之間、就外形說，沒有什么不同，他們的可能的不同只是空間、地位的不同(即是說，印在紙上的地位不同)；否則，就叫作不同形的。例如，在公式：

$$x=x$$

中，等号两边的变項是同形的。相反，在下面公式：

$$x=y$$

中，等号两边的变項是不同形的。

現在要問，下面公式：

$$x+y=y+x$$

是由多少符号构成的？这些符号可以分成多少群，使得两个同形的符号屬于同一的群，而两个不同形的符号屬于两个不同的群？

在 §29 所討論的那些性质中，哪些屬于同形关系，哪些屬于不同形关系？

*11. 在上題答案的基础上，說明为什么可以說：两个同形的符号，就外形說，是相等的，或者，它們有相同的外形？說明如何定义"一个給定的符号的外形"。

将两个同形的符号簡单地叫作相等，或者将它們看成好像是同一个符号，这是非常通行的用法。例如，我們常說，在下面这样一个表达式：

$$x+x$$

中，同一个符号在符号"+"的两边出现。应当如何表示才更加准确？

*12. 在 11 題中所指出的不准确的說法，在本书中也用过好几

次。指出本书§4(第7—11頁）与§17（第52—55頁）中这种不准确的說法，并說明如何将它們改成准确的說法。

下面是这种不准确說法的另一个例子：当我們說包含一个自由变項的語句函項时，我們是指这样的函項，在这样的函項中，所有的自由变項都是同形的。如何将表达式：

包含两个自由变項的語句函項

用更准确的办法表示出来？

13. 在平面上給定一点，在这个平面上，有許多的圓以这个定点作为它們共同的圓心，这許多圓便构成一个集合。試說明这个集合是用“是部分”这个关系序列起来的。如果这許多圓不在同一个平面上，或者，如果它們不是同心圓，試問能否用“是部分”这个关系把这个集合序列起来？

14. 在英文的字与字之間有一种关系，叫做（詞典序列的）在前关系。我們用例子来說明这个語詞的意义。“*and*”这个字在“*can*”这个字之前，因为前者的第一个字母是“*a*”，后者的第一个字母是“*c*”，而在英文的字母序列里，“*a*”在“*c*”之前。“*air*”这个字是在“*ale*”这个字之前，因为它們的第一个字母是相同的（或者說，是同形的——参看前面习題10)，但是，第一个字的第二个字母是“*i*”，第二个字的第二个字母是“*l*”，而在英文的字母序列里，“*i*”在“*l*”之前。同样，“*each*”这个字在“*eat*”这个字之前，“*timber*”这个字在“*time*”这个字之前。最后，“*war*”这个字是在“*warfare*”这个字之前，因为，虽然这两个字的前三个字母都相同，但是，第一个字只有三个字母，而第二个字却有不止三个字母。同样，“*mean*”这个字在“*meander*”这个字之前。

将下面这些字写成一行，使得这行中的每一个字与它右边的字都有在前关系：

care, arm, salt, art, car, sale,

trouble, army, ask。

試对字与字之間的在前关系作出一个普遍的定义。試說明这个关系在由所有的英文字所构成的集合中建立了一个序列。指出这个关系的一些实际应用，并說明为甚么这样就建立了一个詞典的序列。

15. ㊃㊀考虑一个关系 R 与它的否定关系 R'，說明下列关于关系理論的命題是眞的：

(a) 如果关系 R 在 K 类中是自反的，那么，关系 R' 在 K 类中就是不自反的；

(b) 如果关系 R 在 K 类中是对称的，那么，关系 R' 在 K 类中就也是对称的；

*(c) 如果关系 R 在 K 类中是不对称的，那么，关系 R' 在 K 类中就是自反的与連通的；

*(d) 如果关系 R 在 K 类中是傳遞的与連通的，那么，关系 R' 在 K 类中就是傳遞的。

上面这些命題的逆定理是否也能成立？

16. 說明关系 R 如果有 §29 所讲的那些性质之一，那么，它的逆关系 $\breve{R}$ 也有这个性质。

*17. ㊃㊀ §29 中所提出的那些关系的性质，可以很容易地用关系演算来加以表示，如果这些关系所涉及的类 K 是全类的話。例如，公式：

$$R/R \subset R \text{ 与 } \mathbf{D} \subset R \cup \breve{R}$$

就分别地表示关系 R 是傳递的与連通的。說明其理由；回忆一下 §28 关于"**D**"这个符号的意义。試同样用关系运算来表示关系 R 是对称的、不对称的或不傳递的（参看前面习題 8）。下面这个公

式：

$$R/\breve{R}\subset|$$

是表示本章所讲的关系的性质中的哪一种性质？

18. 下面公式所表示的那些关系是函項：

(a) $2x+3y=12$,

(b) $x^2=y^2$,

(c) $x+2>y-3$,

(d) $x+y=y^2$,

(e) x 是 y 的母亲，

(f) x 是 y 的女儿。

前面习題 3 中所提到的关系中哪些关系是函項？

19. 考慮下面公式：

$$x=y^2+1$$

所表示的函項。它的所有主目值所构成的集合是甚么？它的所有函項值所构成的集合是甚么？

*20. 在上面习題 18 中哪些函項是一一函項？再举出几个一一函項的例子。

*21. 考慮下面这个函項：

$$x=3y+1。$$

說明这个函項是一一函項，說明这个函項建立了区間[0,1]与区間[1,4]的一一对应[参看(IV)章习題 6]。从这一点，我們可以得出哪些有关这两个区間中的基数的結論？

*22. 考慮下面的函項：

$$x=2^y。$$

利用这个函項并根据上面的习題，来說明由所有数目所构成的集合与由所有正数所构成的集合是等数的。

*23. 說明由所有自然数所构成的集合与由所有奇数所构成的集合是等数的。

24. 从算术与几何中举出几个多項关系的例子。

25. 在下面公式所表示的三項关系中，哪些是函項：

(a) $x+y+z=0$,

(b) $x \cdot y > 2z$,

(c) $x^2=y^2+z^2$,

(d) $x+2=y^2+z^2$?

26. 試举出几个物理定律的名称，这些物理定律断定了两个、三个与四个量之間的函項关系。

(VI) 論演繹方法

§36. 一个演繹的理論的基本組成部分——基本詞項与被定义的詞項，公理及定理

我們現在要对构造邏輯和数学时所用到的基本原則試加說明。对于这些原則加以詳細的分析和評价是一門专門学科，即演繹科学方法論或数学方法論的任务。对于一个要研究或发展某一門科学的人来說，自觉地了解一門科学的方法，是十分重要的。并且我們会发現，就数学而言，关于方法的知識是特別重要的。因为缺乏这种知識，就不可能了解数学的性質。

我們以下要討論的原則为邏輯和数学方面的知識保证了最高度的明晰性和确定性。由这个观点来看，如果一种方法使我們能够解釋在一門科学中出現的每一个表达式的意义和证实它的每一个断定，这种方法将是理想的。很容易看出来，这种理想是永远不能实現的。事实上当我們試图解釋一个表达式的意义时，我們必

須用到其他表达式；而为了要解釋这些表达式而不陷入恶性循环，我們又必須利用其他的表达式，如此等等。这样我們就是开始了一个永远不能結束的过程，这个过程可以称之为无穷倒退的过程。在证实一門科学的断定了的命题方面，有着类似的情形。因为为了要建立一个命题的正确性，必須引用别的命题，而(为了不出現恶性循环)这又引到了无穷倒退。

在不可达到的理想与可实現的可能性之間进行折衷的結果，出現了有关数学构造的一些原则，这些原则可以陈述如下[43]：

当我們着手构造一門給定的学科时，我們首先把这門学科中对我們說来，立即可以理解的一小組表达式分出来；这一組表达式，我們称之为基本詞項或不定义的詞項。我們使用它們而不去解釋它們的意义。同时，我們采用下列的原则：对于这一門学科中任何其他的表达式，仅当我們利用基本詞項和这門学科中其他已經解釋过的表达式确定它的意义之后，我們才使用它。用这种方式确定一个詞項的意义的語句称作一个定义，通过这种方式，意义被确定的表达式称作被定义的詞項。

对于这門学科的断定了的命题，我們可以用类似的方式进行。那些看起来显然成立的命题被挑选出来[44]，作为基本命题或公理(有时也称作公設，但我們将不以这种专門意义来用这种名詞)；我們认为它們是眞的，而不去建立它們的正确性。另一方面，对于任何其他的命题，当且仅当我們能够建立它們的正确性，而且在这样做的时候，只用到了公理、定义和这門学科中其他的正确性已經建立的命题时，我們才认为它們是眞的[45]。如所周知，这样建立起来的命题称作被证明的命题或定理，建立它們的过程称作一个证明。更一般地說，如果在邏輯或数学中，我們以其他命题为基础，建立一个命题，我們将这个过程称作一个推导或演繹。这样建立

起来的命題称作从其他命題推导出来的,或演繹出来的,或者称作它們的**推出的結論**⑭⑮。

現代数理邏輯就是按照上述原則构造起来的学科之一⑭⑰。不幸的是在本书的狹小范圍中,不可能对于这一重要事实給以应有的地位。如果任何其他的学科是按照这些原則构造起来的,它就已經是以邏輯为基础的,可以說,已經以邏輯为前提了。这就是說,邏輯的表达式和定律是和要建立的这門学科的基本詞項和公理具有同样的地位。例如邏輯語詞被用在公理、定理和定义之中,而不先解釋它們的意义;邏輯定律被用在证明之中,而不先去确立它們的正确性。有时在构造一个学科时,不仅使用了邏輯,而且在同样的意义之下,还要使用一些已經构造出来的数学学科,这样是比較方便的。为了簡便,可以將这些学科和邏輯称作**在給定学科前的学科**。邏輯本身则不以任何学科为前提,在构造算术作为一門特殊的数学学科时,邏輯是唯一在前的学科。另一方面,就几何而言,最好不仅以邏輯为前提,而且应以算术为前提(虽然这不是不可避免的)。

根据上面所說的,必須对于前面所陈述的原則的陈述方式作某些修改。在着手构造一个学科以前,必須先列举出来在这一学科之前的那些学科,給表达式下定义和給命題作证明的工作仅限于現在要构造的学科的特有的表达式和命題,也就是說,限于那些不屬于在前的学科的。

严格按照前面所說的原則构造一个学科的方法称作**演繹方法**,以这种方式构造出来的学科称作**演繹的理論**①。一种愈来愈普

① 演繹方法不能看作是近代的成就,在古希腊数学家欧几里德(Euclid)的"几何原本"中,我們发現其中对于几何的陈述,就上述的方法論的原則来看,也沒有多少不够之处⑭⑱。两千二百年来,数学家把欧几里德的著作看作科学精确性的理想和范本。

遍的看法是数学学科与其他科学的唯一本质的区别就是演繹法。不仅每一数学学科是一种演繹的理論，而且每一种演繹的理論是一門数学（按照这种看法，演繹邏輯也是一門数学）㊃㊈。我們在这里将不討論支持这种看法的理由，而只是指出，为这种看法提出有力的論据是可能的。

§37. 一种演繹的理論的模型和解釋

由于系統地应用前一节中所陈述的結果，演繹的理論获得了一些有兴趣而且重要的特性。这些我們預备加以描述。因为我們将要討論的問題是相当复杂而且抽象的，我們将用一个具体的例子加以說明。

假定我們对于有关綫段的全等的一般事实有兴趣，并且准备把几何这一部分建立为一个特殊的演繹理論。我們規定变項“x”，“y”，“z”，…代表綫段。我們选擇“S”与“$\cong$”等符号作为基本詞項。前者是“所有綫段的集合”的縮写；后者代表全等关系，所以公式

$$x\cong y$$

讀作

綫段 x 与 y 是全等的。

此外，我們只采用两条公理

公理 I. 对于集合 S 的任一元素 x 而言，$x\cong x$（換言之，每一綫段与其自身全等）。

公理 II. 对于集合 S 的任意的元素 x, y 与 z 而言，如果 $x\cong z$

只是近五十年来才在这方面有了眞正的进展。在这时期中，数学的基本学科几何与算术的基础按照現代数学方法論的要求奠定了下来。关于这项进展有关的著作，我們将至少提出下列两部，它們已具有重大历史意义：《数学公式》——这是一部集体写的著作（托林諾 1895—1908），編者和主要著者是意大利数学家与邏輯学家貝安諾（G. Peano，1858—1932）；以及現代德国大数学家希尔伯特（D. Hilbert）所著的《几何基础》（萊比錫与柏林 1899）。

并且 $y \cong z$, 那么 $x \cong y$(換言之, 与同一綫段全等的两个綫段, 彼此全等)。

各种关于綫段全等的定理可以从这些公理推出来, 例如

定理 I. 对于集合 S 的任意的元素 y 与 z 而言, 如果 $y \cong z$, 那么 $z \cong y$。

定理 II. 对于集合 S 的任意的元素 x, y 与 z 而言, 如果 $x \cong y$ 并且 $y \cong z$, 那么 $x \cong z$。

这两条定理的证明是很容易的。我們先說明第一条的证明。

在公理 II 中以“z”代“x”, 我們得到:

对于集合 S 的任意的元素 y 与 z 而言, 如果 $z \cong z$ 并且 $y \cong z$, 那么 $z \cong y$。

在这个陈述的題設中我們有公式

$$z \cong z,$$

而根据公理 I, 这个公式无疑是正确的, 于是可以省去。这样我們就得到了所要证的定理。

关于这些簡单的考虑, 我們要說下面的一些話。

我們的微型的演繹理論是建立在一个适当选擇的基本詞項与公理的系統之上的。我們关于基本詞項所代表的事物, 即綫段与其全等关系的知識是很丰富的, 选用的公理并沒有穷尽了这些知識。但这种知識可以說只是我們个人的东西, 对于我們的理論的构造沒有絲毫影响。特别是在由公理推出定理时, 我們根本不利用这項知識, 就好像我們并不了解我們所考虑的概念的內容, 并且对于公理里沒有明白陈述出来的东西, 好像并不知道。像通常所說的, 我們忽略了我們所采用的基本詞項的意义, 而只注意这些詞項在其中出現的公理的形式。

这里蘊函着一个非常重要而有兴趣的結論。让我們把我們的

理論中的所有公理和定理中的基本詞項代之以适当的变項，例如以代表类的变項“K”代替符号“S”，以代表关系的变項“R”代替符号“$\cong$”(为了使問題簡单化，我們这里忽略那些包含有被定义項的定理)。我們的理論中的命題于是就不再是語句，而变成了語句函項，这种函項包含着两个自由变項“K”与“R”，并且一般表达了下列的事实，即关系 R 在类 K 中有着这种或那种性质（或者更确切地說，在 K 与 R 中存在着这种或那种的关系；参看§27)。例如，很容易看出来，公理 I 与定理 I 及定理 II 現在是說关系 R 在 K 之中是自反的、对称的和傳递的。公理 II 則是表示一种沒有特别名字的性质，我們将称这种性质为 **P**；就是下列的性质：

对于类 K 中的任意的元素 x, y 与 z 而言，如果 xRz 并且 yRz，那么 xRy。

因为在我們的理論的证明中，我們并沒有利用綫段类与全等关系的性质，而只利用了公理中明显地陈述出来的性质，每一个证明都可以推广，因为它可以应用于任何具有这些性质的类 K 和关系 R。由于将证明推广的結果，对于我們的理論的任一定理，可从邏輯的領域中，也就是从关系理論的領域中，找到一条一般的定律与之相应，并且說明了，在 K 中的任一自反的和具有性质 **P** 的关系 R，也具有 **P** 定理中所表达的性质。例如下列两条关系理論的定律相当于定理 I 和定理 II：

I′. 每一种在类 K 中自反的和具有性质 **P** 的关系 R 在 K 中是对称的。

II′. 每一种在类 K 中是自反的和具有性质 **P** 的关系 R 在 K 中是傳递的。

如果一种关系 R 在类 K 中是自反的并且具有性质 **P**，我們說 K 与 R 形成我們的理論的公理系統的一个**模型**或一种**实現**，或者

簡单地說，它們滿足这些公理。例如綫段和全等关系，也就是基本詞項所代表的东西，构成这个公理系統的一个模型；自然，这个模型也滿足由公理推出来的所有定理(为了精确，我們应該說，一个模型不是滿足一种理論的命題，而是滿足那些用变数代基本詞項后所得到的語句函項)。但是这一特殊的模型在这个理論的构造中并沒有什么特殊的地位。相反的，根据像 I′ 与 II′ 那样的一般性的邏輯定律，我們得到下列的結論，即这一公理系統的任一模型滿足所有由这些公理推出的定理。由于这一事实，我們的理論的公理系統的一个模型也称作这一理論本身的模型。

甚至于在邏輯与数学的范圍中，我們能够为我們的公理系統找到許多不同的模型。为了得到一个这样的模型，我們在任一其他的演繹理論中选定两个常項，比如說“**K**”与“**R**”(前者代表一个类，后者代表一个关系)，然后我們将这一系統中的每一个“**S**”代之以“**K**”，每一个“≅”代之以“**R**”，最后我們說明这样得出来的語句是新理論的定理(或者是公理)。假如我們这样做成了，我們說，我們在另一演繹理論中，为这一公理系統(同时也是为整个演繹理論)找到了解釋。如果不仅在我們的理論的所有的公理中，而且在所有的定理中，将“**S**”与“≅”代之以“**K**”与“**R**”，我們可以事先确信，这样得到的語句将是新的演繹理論中的眞語句。

关于我們的微型理論的解釋，我們在这里将給出两个具体的例子。在公理 I 与公理 II 中，“**S**”代之以全类“$\vee$”，“≅”代之以相等符号“=”，立即可以看出，这些公理变成了邏輯定律(事实上就是 §17 中的定律 II 与 V 而稍有改变)。所以全类与相等关系构成这个公理系統的一个模型，而我們的理論在邏輯中找到了一个解釋。这样，如果我們使定理 I 与 II 中的符号“**S**”和“≅”代之以“$\vee$”与“=”，我們一定得到了眞的語句(事实上，我們对它們也是

熟悉的——参看 §17 的定律 III 与 IV）。

其次让我們来考虑整个数的集合，或者数的其他集合，用“N”来代表它。两个数 x 与 y 称作相等的，写作

$$x \equiv y$$

如果它們的差 $x-y$ 是一个整数；例如我們有

$$1\frac{1}{4} \equiv 5\frac{1}{4},$$

而下列的相等式则不成立

$$3 \equiv 2\frac{1}{3}。$$

如果将两个公理中的基本詞項都換成“N”或“≡”，我們很容易证明，得到的語句是算术的两条定理。这样，我們的理論在算术中得到解釋，因为数的集合 N 与相等关系构成这一公理系統的一个模型。并且不需要任何的特殊的推理，我們相信，如果定理 I 与 II 和公理一样經过同样的变换，将成为眞的算术命題。

上面所描述的一般事实在方法論的研究方面有許多有兴趣的应用。我們这里只举一个例子来加以說明。我們将要說明，如何在这些事实的基础之上证明某些語句是不能从我們的公理系統中推出的。

让我們来考虑下面的語句 **A**（只用邏輯詞項和我們的理論的基本詞項来构成的）：

A. 集合 **S** 中存在着两个元素 x 与 y，而 $x \cong y$ 不成立（換言之，存在着两个不全等的綫段）。

这个語句看起来毫无疑問是眞的，但是，在公理 I 与公理 II 的基础上进行证明，得不出結果。这样就引起一个猜測，即語句 A 不能从我們的公理中推出。为了证实这个猜測，我們作下面的論证，

如果語句 A 可以在我們的公理系統的基础上加以证明，則我們知道，这个系統的每一个模型都滿足这个語句，所以，如果我們能够指出这一公理系統的某一个模型是不滿足 A 的，我們就是证明了这一語句不能由公理 I 和公理 II 推出。現在要找到这样一个模型是毫不困难的。例如让我們考虑所有整数构成的集合 I（或者任何其他的整数集合，例如只包含 0 与 1 的集合）以及上面已經說过的相等关系 ≡。由前面所說的我們已經知道集合 I 与关系 ≡ 构成我們的公理系統的一个模型，而这一模型不能滿足語句 A；因为不相等的两个整数 x 与 y，也就是說它們的差不是一个整数的 x 与 y 是不存在的。另一个滿足这个目的的模型是一个任意的个体类，和任意两个个体中間的普遍关系 $\vee$。

上面所用的推理方法称作展示模型或凭借解釋的证明方法。

这里所討論的事实和观念不作很大的改变就可以应用到其他演繹理論上去。在下一节中，我們将以較一般的方式来描述它們[五十]。

§38. 演繹法定律；演繹科学的形式的特性

*我們考虑建立在一个基本詞項和公理的系統之上的任意的演繹理論。为了使我們的問題簡单化，我們設这一理論只假定邏輯，就是說，邏輯是在这一給定的理論之前的唯一理論（参看 §36）。設想在我們的理論的所有命題中，基本詞項都代之以适当的变項（像在 § 37 中一样，为了簡单，我們不考虑包含被定义項的定理）。这种理論的命題变成了語句函項，其中包含着那些代替基本詞項的符号作为自由变項，而且只包含邏輯常項。当給定了某些东西的时候，我們可以确定它們是否滿足我們的理論的所有公理，或者更精确地說，是否滿足由那些公理所得到的語句函項（也就是說，

当我們用这些事物的名字来代替自由变項时，这些語句函項是否成为眞的語句，参看§2)。如果是这样，我們說这些被研究的事物构成我們的演繹理論的公理系統的一种模型或实現；有时候我們也說它們构成了这个演繹理論本身的一种模型。以类似的方式，我們可以确定，这些給定的事物是否不仅滿足这一公理系統，而且滿足我們的理論的其他命題系統，于是可以确定它們是否构成这一系統的一种模型（并不排除这一系統只包含一个命題的情形)。

例如，給定的理論的基本詞項所代表的那些事物构成这一公理系統的一种模型，因为我們假定所有公理都是眞的語句；这种模型自然滿足我們的理論的所有定理。但是就我們的理論的結构而言，这一模型在所有模型之中并不占有特殊地位。当我們由公理推出一些定理来的时候，我們并不考虑这一模型的特殊性质，我們只利用那些在公理中明显陈述的性质，因而也就是屬于这一公理系統的每个模型的性质。所以我們的理論的某一定理的每一证明都可以推广到公理系統的每一模型，因而可以变成一个更一般的論证，它不再是屬于我們的理論的，而是屬于邏輯的；而且由于这一推广，我們得到了一个一般性的邏輯命題(像前一节中定律I′与II′一样)，它确定了这一事实，即有关的定理是我們的公理系統的每一个模型都滿足的。最后得到的結論可以陈述如下：

一个給定的演繹理論的公理系統的任一模型滿足这个理論的每一定理；并且对应于每一定理存在着一个一般性的命題，它在邏輯中可以陈述和证明，并且它确立了下列事实，即任一模型都滿足有关定理㊿㊀。

我們这里有着一条屬于演繹科学方法論范圍的一般定律，当我們用更精确的方式加以陈述时，这条定律被称作演繹法定律(或

演繹定理)①。

这一定律的重大的实际意义乃在于这一事实，即我們时常可以不离开演繹科学的范圍，而找出某一特殊理論的公理系統的各种模型。为了要得到这样一个模型，只要从其他某一演繹理論(这一理論可以是邏輯或假定邏輯的一种理論）中选出某几个常項使它們在公理中代替基本詞項，并說明这样得到的語句是那一理論中确立的命題。在这种情形下，我們說我們在另一理論中找到了原来的理論的公理系統的一个解釋(在特殊情形下，选出的常項可能屬于原来考虑的理論，在这种情形之下，某些基本詞項可能保持不变，于是我們說，給定的公理系統在被考虑的理論之中，找到一个新的解釋)。我們也将使原来的理論的定理經过类似的变换，将所有基本詞項都代之以那些在建立公理的解釋时已經用过的常項。根据演繹法定律，我們可以事先确信，这样得到的語句是新的理論中的确立的命題。这一点我們可以陈述如下：

在一个給定的公理系統的基础之上所证明的一切定理对于这一系統的任一解釋都是有效的。

对于这些变换了的定理中的任一个給以证明都是多余的；这是一种純粹机械性質的工作，只要把公理和定理所經过的变换施加在原来的理論中的相应的論证上就可以了。可以說，一个演繹理論中的每一个证明都包含着无限个类似的证明。

上面所說的事实由节省人类思想的观点說明了演繹法的巨大价值。它們在演繹科学方法論中为不同的論证和研究建立了基础，只就这点来說，也是有很大的理論价值的㊄㊀。特別是演繹法定律，它是一切所謂凭借解釋的证明的理論基础。在上一节中，我

① 这条定律著者原是作为一条一般的方法論公設加以陈述的，后来证明在各种不同的特殊演繹理論中都能成立。

們遇到过一个这种証明的例子；我們在本书的第二部分将遇到各种其他的例子。

为了精确起見，需要补充說明，这里所讲的适用于任何以邏輯为前提的演繹理論，至于将它們应用于邏輯本身，則会造成一些困难，这些困难我們在这里不討論了。如果一种演繹理論不仅以邏輯为前提，也以其他理論为前提，上面的說明就将具有更复杂的形式。

这里所討論的方法論方面的現象的共同来源就是前一节中指出的事实，就是說，在构造一种演繹理論时，我們忽略公理的意义，而只考虑它們的形式。由于这种原因，当人們談起这些現象时，人們就談到演繹科学和这些科学中的推理的純粹形式的特性。

有时我們发現一些以誇論式的和夸張的方式来强調数学的形式性的說法；虽然基本上是对的，这些說法可能造成模糊和混乱。有时我們听到或甚至于讀到下面的說法，即数学的概念沒有具体內容；在数学里我們不知道我們討論的是什么，对于所作的判断是否眞也沒有兴趣。我們必須批判地看待这些判断。如果在构造一种理論时，我們在做法上宛如不了解这一学科的詞項的意义，这不等于否认这些詞項有意义。有时我們发展一种演繹理論而对于它的基本詞項不賦与任何固定的意义，这样就是将这些基本詞項看作变項，在这种情形之下，我們說我們将这一理論看作一种形式系統[53]。但这是比較少見的情形（即使考虑到§36中对于演繹理論的一般刻划中所說的也是如此）。仅当对于这一理論的公理系統可能給以几种解釋时，这种情形才会发生，也就是說，如果对于这一理論中的詞項可以有几种不同的方式賦与意义，而我們不願意特別着重任何一种时，才会发生。另一方面，一种不可能給以任何解釋的形式系統是沒有人对它感到兴趣的[54]。

最后我們要提到关于数学学科的解釋的某些有兴趣的例子。

这些例子比 §37 中所讲到的要重要得多。

算术的公理系統可以在几何中得到解釋。給定任一直綫时，可以定义一些在它的点之間，和对于这些点施加的运算之間的关系，而这些关系是能滿足算术的全部公理的(从而也滿足所有的定理)。而这些公理原来是关于数与数之間和关于数的运算之間的相应的关系的（这与 §33 中所提到的一种情形密切相关，即在一条綫上的点与所有的数之間可以建立一一对应)。反过来，几何的公理系統在算术中也可以得到解釋。这两項事实的应用是多方面的。例如几何图形可以用来給出算术中各种事实的可見的像（这就是称作图解法的方法)。另一方面我們可以利用算术或代数的方法来研究几何事实。几何有一个称作解析几何的分支，专門从事这一类的研究。

我們在前面已經看到，算术可以作为邏輯的一个部分而构造出来(参看 §26)㊿㊿。但是如果我們将算术看作一个建立在它自己的基本詞項和公理系統之上的演繹的理論，它与邏輯的关系可以描述如下：算术在邏輯中可以得到解釋（假定邏輯中包括无穷公理，参看 §26)；換句話說，在邏輯中可以定义出那些滿足算术的所有公理，从而也滿足算术的所有定理的概念。如果我們記得，几何在算术中可以有解釋，我們就得出結論說，几何在邏輯中也可以得到解釋。所有这些都是从方法論的观点来看，特别重要的事实。*

§39. 公理与基本詞項的选擇；它們的独立性

我們現在討論一些带有特殊性的問題，而这些問題是有关演繹法的基本組成部分的，即基本詞項与公理的选擇和定义与证明的构造。

一个需要了解的很重要的事实是在基本詞項和公理的选擇

中，我們有很大程度的自由。认为有某些表达式用任何方式都不能定义，有某些命題在理論上不能证明，是錯誤的。設一个給定的理論有两个語句系統，如果第一个系統中的每一个語句都可以从第二个系統中的語句，以及在先的理論的定理中推出，并且第二个系統中的每一語句可以从第一个系統的語句中推出，我們称这两个系統是等价的(如果任何語句在两个系統中都出現，那么它們自然不需要加以推导)。設某一个演繹理論是建立在某一公理系統之上，并在构造过程中，我們遇到一个与該公理系統等价的命題的系統。(在§37中所討論的关于綫段全等的微型理論中，可以找到具体的例子。很容易证明，它的公理系統与公理I和定理I，II所构成的系統等价。)如果从理論的观点来看，有这种情形，那么可以重新构造整个的理論，而使新的系統中的命題成为公理，原来的公理成为定理。甚至于这些新公理可能在最初看起来并不显然，这也是不重要的。因为每一語句当它从其他显然的語句中以令人信服的方式推导出来时，就在一定程度上变成显然的。所有这些——加以必要的变更——同样适用于一个演繹理論的基本詞項。这些詞項的系統可以用有关的理論的任何其他的詞項系統来代替，只要这两个系統是等价的，也就是第一个系統中的詞項可以用第二个系統中的詞項和在先的理論中的詞項加以定义，反之亦然。我們决定选出某一公理和基本詞項的系統而不选另一系統，并不是由于理論上的理由(或者至少不仅是由于理論上的理由)；其他的因素——实踐方面的、教学方面的，甚至于美学方面的在这里起着作用。有时这是一个选出最簡单的基本詞項和公理的問題，然后或者我們希望基本詞項和公理愈少愈好，或者我們希望要一些基本詞項和公理，这些基本詞項和公理能够以最簡单的方式来定义一个我們特别有兴趣的給定的理論的詞項，和证明其中的命

题[56]。

另一問題与上面所說的密切相关。基本上我們企图得到一个不包含多余的命題的公理系統，而所謂多余的，就是可以由其余的公理推出，因而可以算作构造中的理論的定理的。这种公理系統称作独立的（或公理彼此独立的系統）。我們同样也注意使得基本詞項系統是独立的，就是說，它不包含任何可以用其他詞項定义的多余的詞項。但时常由于实践的或教学上的理由，我們并不坚持这些方法論方面的原則，特别是当着如果省去了一个多余的公理或基本詞項就会使理論的构造变得很复杂的时候。

§40. 定义与证明的形式化，形式化的演繹理論

我們有理由认为演繹方法是构造科学时所用的方法中最完善的一个[57]。它在很大程度上消除了誤差和模糊不清之处，而不会陷于无穷倒退。由于这个方法，对于一个給定的理論的概念的內容和定理的眞实性提出怀疑的理由大为減少，最多只对于少数基本詞項和公理而言，仍旧存在。

但对于这一說法需要有一項保留，仅当所有的定义和证明都完全能完成它們的任务，也就是仅当定义能使所有被定义的詞項的意义都完全清楚，而且证明能完全令人信服地說明了所有待证明的定理的有效性时，演繹法的应用才能得到預期的結果。要檢查定义和证明是否眞正滿足了这些要求并不是一件容易事。例如很可能对某一个人来說是令人信服的論证，对另外一个人来說，却是不可理解的。为了消去在这方面引起怀疑的根源，現代方法論在檢查定义和证明时，努力用客观性质的标准来代替主观的估价，完全根据定义和证明的結构，也就是它們的外形来判定它們是否正确。为了这个目的，特别提出了定义規則和证明規則（或推理規

則)。第一种告訴我們那些作为所考虑的理論中的定义的語句要具有什么样的形式，第二种描述了为了从这一理論的某些命題推出另外一些命題时，所要經过的变换。每条定义必須按照定义規則来下，每一个证明必須是**完全的**，也就是說，它必須包含着证明規則对于已經承认为眞的語句的一系列的应用(参看 §11 与 §15)。这些新的方法論的公設可以称作**定义与证明的形式化的公設**。按照这些新的公設构造起来的学科称作**形式化的演繹理論**①㊄㊇。

由于这种形式化的公設，数学的形式的特性大为增加。还在演繹方法发展的早期，在构造一門数学学科时，我們已經假定地忽略該学科所特有的一切表达式的意义，宛如这些表达式都已經用变項来代替，而缺乏任何独立的意义。但至少对于邏輯概念我們是可以賦与习用的意义的。这样，一种数学学科的公理和定理如果不是作为語句来处理，至少是作为語句函項来处理，也就是作为具有語句的語法形式、而表达事物的某些性质或事物間的某些关系的表达式。从已經被接受的公理(或已經证明的定理)推出一条定理就是证明所有滿足公理的事物也滿足有关的定理；数学的证明和日常生活中的考虑相去不远。但現在却是全部忽略在給定的学科中所遇到的所有表达式的意义。并且我們认为在构造一种演繹理論时，可以认为这一理論中的語句是沒有任何內容的符号的組合㊄㊈；而每一证明則是使公理或已证明的定理經过一系列外形上的变换。

根据現代的需要，邏輯之作为数学的基础有其更深刻的意义。

---

① 最先使演繹理論具有形式化形式的人是弗萊格，前面已两次引用到他(参看第 16 頁 §7 注 ②)。在已故的波兰邏輯学者列斯尼夫斯基(S. Leśniewski，1886—1939)的著作中，形式化的过程达到了非常高的程度。他的成就之一是关于定义規則的精确而完全的陈述。

我們不再滿足于下面的想法，即认为由于天生的或后天获得的正确思維的能力，我們的論证是符合邏輯的規則的。为了对于一条定理作出完全的证明，这就必須将证明規則所規定的变換不仅应用在我們所研究的理論的命題之上，而且应用到邏輯命題之上(以及其他的在先理論之上)，并且为了这个目的，我們必須把可以用到证明上去的所有邏輯定律全部列举出来。

至少在理論上可以說，只是由于演繹邏輯的发展，我們今天能够使每一門数学学科都具有形式化的形式[60]。但是在实踐上仍有很大的問題，精确性和方法論的正确性的增加却使明白性和可理解性受到損失[61]。整个問題是比較新的，有关的研究还沒有結束，我們有理由希望，进一步的研究将得到根本的簡化。所以如果現在在一門数学的通俗讲述中完全按照形式化的公設去做是为时过早的。特别是如果要求某一門数学的一本普通教本的定理的证明都具有完全的形式，那是不合理的。但我們可以期望一本教本的作者在直观上完全确定，所有他的证明都能变成那种形式，并且甚至于讲到一定的地步，使得一个在演繹思維方面有一些經驗并且有充足的現代邏輯知識的讀者能够不太困难就填补上那些空隙。

§41. 一个演繹理論的无矛盾性与完全性；判定問題

我們現在来考虑两个方法論方面的概念，这两个概念从理論的观点来看，十分重要，而在实用上是意义很小的。这些就是**无矛盾性**与**完全性**的概念。

一个演繹理論称作**无矛盾的**或**一致的**，如果在这一理論中，沒有两个确立的命題互相矛盾，换言之，如果在两个互相矛盾的語句

之中(参看 §7)，至少有一个是不能证明的。一个理論称作完全的，如果在两个由这一理論(以及在它前面的理論)的詞項陈述出来而且互相矛盾的語句之中，至少有一个是在这个理論中能够证明的。如果一个語句的否定在一个給定的理論中是能够证明的，則我們时常說，这一語句在这个理論中能够被否证。利用这一术語，我們可以說，一个演繹理論是无矛盾的，如果在其中沒有任何語句是既能证明又能否证的；一个理論是完全的，如果其中的每一語句或者能够证明或者能够否证。“无矛盾的”和“完全的”这两个詞不仅可应用于一种理論，而且可应用于作为这一理論的基础的公理系統。

現在让我們对于这两个概念的含义得出一个清楚的概念。对于一个学科，如果我們有理由怀疑，并非其中的所有确立的命題都是眞的，則即使这一学科在方法論的各方面都是正确地构造起来的，它在我們眼里也将失去价值。另一方面，在一个学科之中，能证明的眞語句的数目愈多，則这一学科的价值愈大[63]。由这一观点来看，如果一个学科在它的确立的命題之中，包括了所有与这个理論有关的眞語句，而不包括任何假的語句，則这一学科可以算作理想的。在这里一个語句算作相关的，如果它是完全由現在所考虑的学科的詞項（及其在前的学科的詞項）陈述出来的。归根到底，举例說，我們不能期望在算术中能够证明那些包含化学或生物学的概念的眞的語句。現在設一个演繹理論是矛盾的，也就是說，在它的公理与定理中有两个互相矛盾的語句；根据一条著名的邏輯定律，即矛盾律（参看 §13），这两个語句之中必定有一个是假的。如果另一方面，我們假定这个理論是不完全的，那么就是有着两个相关而互相矛盾的語句，其中的任何一个都不能证明，而根据另一条邏輯定律，即排中律，这两个語句之中必定有一个是眞的。我們由此看出，一个演繹理論如果不是既无矛盾又完全，就不能达

到我們的理想[六三]。(我們并不是要說，每一个既无矛盾又完全的学科必定事实上是我們的理想的实現，也就是說，它必定在它的确立的命題中包含了所有眞的語句和只是这些語句[六四]。)

我們所考虑的問題还有另外的一面。任一演繹科学的发展都是利用这一科学中的詞項陈述出下列类型的問題，即：情形是这样嗎？然后根据已經假定的公理，設法判定这些問題。这一类型的問題显然可以判定为两种可能中的一种，即肯定的或否定的。在第一种情形下，答案是“情形是这样”，在第二种情形下，答案是“情形不是这样”。一个演繹理論的公理系統的无矛盾性和完全性就保证了上面所說的那种問題的每一个在这一理論中可实际加以判定，并且只能以一种方式判定。无矛盾性排除任何問題以两种方式判定的可能性，即既肯定又否定，而完全性則保证至少可有一种方式加以判定。

和完全性問題紧密相連的是另外一个更一般的問題，一个与不完全的与完全的理論都有关的問題。这个問題就是对于給定的演繹理論找出一个一般的方法，使我們能够判定由这一理論的詞項所构成的任一語句是否能在这一理論中加以证明。这一重要的問題称作**判定問題**①。

只有少数的演繹理論，我們可能說明它們是无矛盾的和完全的。它們一般都是邏輯結构簡单，包含概念不多的初等理論。第II章中已經討論过的語句演算是一个例子。假如我們把它看作一个独立的理論而不看作邏輯的一部分(但是当我們把“完全的”这一詞应用到这一理論时，意义略有改变)。既无矛盾又完全的一个

① 希尔伯特特别强調这一节中所討論的概念和問題的意义——特别是无矛盾性与判定問題的概念。他推动了数学基础方面許多重要研究。由于他的倡議，这些問題近来成为許多数学家和邏輯学家大力研究的对象。

最有兴趣的例子可能是初等几何。这里所說的几何是限于若干世紀以来作为初等数学的一部分在中等学校中讲授的內容，也就是說，是一門研究各种特殊的几何图形如直綫、平面、三角形、圓等性质，而不考虑几何图形的一般概念（点的集合）。① 我們要是考虑算术和高等几何，情形就根本不同。可能研究这些科学的人沒有人怀疑它們的无矛盾性，但是根据最近方法論方面的研究，关于它們的无矛盾性的一个严格的证明遇到了带有根本性的困难。完全性的情形更糟，算术和高等几何已被发現是不完全的，因为可以构造出一些算术的或几何的問题，而这些問题在这些学科中旣不能加以肯定地判定，也不能否定地判定㊅㊄。也許可以設想，这一事实的产生是由于我們現有的公理系統和证明方法有缺点，作适当的改进后（如扩充公理系統），在将来可能得到完全的系統。但更进一步的研究已經說明，这項猜測是錯誤的。要想建立一个旣无矛盾又完全的演繹理論，其中包括了全部的关于算术或高等几何的眞的語句作为它的定理，那是永远不可能的。其次我們发現判定問题在这学科中同样是不能解决的。不可能找到一个一般的方法使我們能够辨别这些学科中哪些語句是可证的，哪些是不可证的。这些結果可以推广到許多别的演繹科学，特别是可以推广到所有那些以整数算术（就是关于整数的四种基本运算的理論）为前提或可以发展出这一理論的那些演繹科学。*例如，这些結果可以应用到类的一般理論（根据 §26 末尾的說明可以推出）。*②

由于上面所說的，可以了解无矛盾性和完全性的概念虽然在

---

① 語句演算的完全性的第一个证明（也就是关于完全性的研究的第一个成功）应归功于美国現代邏輯学家波斯特（E. L. Post）。初等几何完全性的证明是著者做出来的。

② 这些極端重要的成就是現代奧地利邏輯学家哥德尔作出来的。他的有关判定問題的結果又經現代美国邏輯学家車尔赤（A. Church）加以扩充。

理論上很重要，而在实际构造演繹科学时却沒有什么影响㊅㊅。

§42. 演繹科学方法論的扩大的概念

关于无矛盾性和完全性的研究是使得方法論的研究范圍扩充的重要因素，也是使得演繹科学方法論的全部性质发生根本改变的重要因素。本章开头所提出的方法論的概念在这一科学的历史发展过程中，已被发現是太狹了。对于在演繹科学的实际构造中所应用的方法进行分析和估价已不再是方法論的唯一的任务，甚至于已不再是它的重要任务。演繹科学方法論已經变成了一門关于演繹科学的一般性的科学，就像算术是关于数的科学，几何是关于几何图形的科学。在現代方法論中，我們不仅研究构成演繹理論的語句，并且研究这些理論的本身。我們考慮組成这些語句的符号与表达式，表达式与語句的性质和集合，它們中間的关系（例如推出关系），甚至于表达式与它們所"談到"的那些事物的关系（例如指示关系）；我們建立关于这些概念的一般定律。

*因此可以得出这样的結論，就是說，那些指示出現在演繹理論中的表达式以及这些表达式的性质和它們之間的关系的詞項不屬于邏輯的范圍，而屬于演繹科学方法論。这特別适用于本书前几章中引入和用过的某些概念，例如"变項"，"語句函項"，"量詞"，"結論"以及其他許多概念。为了使我們对于邏輯的詞項与方法論的詞項之間的区別弄得更清楚一些起見，让我們来考虑"或"与"析取式"这两个詞。"或"字自然是屬于邏輯的，即屬于語句演算的，虽然它也在所有其他科学中、因此也就在方法論中应用。另一方面，"析取式"这个詞是指示借助于"或"字构造出来的語句，它是方法論的詞項的一个典型的例子。

讀者們也許会感到惊訝，在关于邏輯的各章中，我們应用了这

样多的方法論中的詞項。但解釋是比較簡单的。一方面，我們在 §9 中已經提过的一种情形在这里起着重要的作用，这就是在数学家与邏輯学家中間习慣于用包含方法論的詞項的短語作为某些純粹是数学性质或邏輯性质的表达式的同义詞（有时是为了文体的理由），在某种程度上，我們在本书中也是这样用的。但在另一方面，这里还有一个更重要的因素；在本书中我們沒有企图以一种系統的方法构造起邏輯来，而只是談論邏輯，討論和評論它的概念与定律。但我們知道（根据 §18）当我們談論邏輯概念时，我們必須使用这些概念的名称，也就是哪些已經屬于方法論的詞項。如果我們将邏輯构造为一种演繹理論，而对于它不作任何評論，那些方法論的詞項将只在定义和推理的規則的陈述中出現。*

由于方法論的发展，在这方面需要应用新的更精密的和更准确的探討方法。方法論和构成它的研究对象的那些科学一样，也具有演繹科学的形式。由于研究范圍的扩充，“演繹科学方法論”这一名詞的本身看起来已不太合适；事实上“方法論”仅指“关于方法的科学”。所以现在时常用其他名詞代替这一名詞，例如“证明論”（这并不太好）或“元邏輯与元数学”（这好得多），这个名詞的含义是和“关于邏輯与数学的科学”差不多是一样的。还有一个名詞近来开始在使用，就是“邏輯語法与演繹科学的語义学”，这个名詞着重指出了演繹科学方法論与日常語言的文法的相似之处。①

① 广义的演繹科学方法論是一門非常年輕的科学。它的显著的发展是在大約 20 年前才开始的；同时在两个不同的中心发展起来（看来是彼此独立的）。这就是哥丁根与华沙，哥丁根是在希尔伯特（参看第 115 頁 §36 注①）与貝尔納斯（P. Bernays）的影响之下，在华沙则有列斯尼夫斯基与路加西維契以及其他一些人在工作着（参看第 128 頁 §40 注①和第 16 頁 §7 注②）。

练　习

1. ㊅㊆第 IV 章中所考虑的类的运算可以作为一个独立的演繹理論构造起来，并且只假定語句演算，在这項构造中，我們将“$\vee$”，“$\wedge$”，“$\subset$”这几个符号和 §25 中所引进的所有的运算符号作为基本詞項。我們并設定下列九条公理①：

公理 I.　$K \subset K$

公理 II.　如果 $K \subset L$ 并且 $L \subset M$，那么 $K \subset M$

公理 III. $K \cup L \subset M$ 当且仅当 $K \subset M$ 并且 $L \subset M$

公理 IV. $M \subset K \cap L$ 当且仅当 $M \subset K$ 并且 $M \subset L$

公理 V.　$K \cap (L \cup M) \subset (K \cap L) \cup (K \cap M)$

公理 VI. $K \subset \vee$

公理 VII. $\wedge \subset K$

公理 VIII. $\vee \subset K \cup K'$

公理 IX. $K \cap K' \subset \wedge$

由这些公理我們可以推出各种定理、試证明下列的定理(利用所附的提示)。

定理 I.　$K \cup K \subset K$

提示：将公理 III 中的“L”和“M”换成“K”，注意这个等值式的右边是为任一类 K 所滿足的（根据公理 I），所以左边也必定是永远被滿足的。

定理 II.　$K \subset K \cap K$

提示：这一证明用到公理 IV 与公理 I，并与定理 I 的证明

① 这里給出的公理系統主要是习玉德的工作（参看第 84 頁 §27 注①）。現代美国数学家亨丁頓（E. V. Huntington）曾发表了若干种类的演算的簡单的和有兴趣的公理系統。有一些关于邏輯和数学理論的公理基础的重要貢献也应归功于他。

相似。

定理 III. $K \subset K \cup L$ 并且 $L \subset K \cup L$

提示：在公理 III 中以"$K \cup L$"代"M"，注意由于公理 I，这个等值的左边是永远被满足的。

定理 IV. $K \cap L \subset K$ 并且 $K \cap L \subset L$

提示：这一证明与定理 III 的证明相仿。

定理 V. $K \cup L \subset L \cup K$

提示：在公理 III 中以"$L \cup K$"代"M"。并将这样得到的等值式的右边与定理 III 比較(其中"K"代之以"L"，"L"代之以"K")。

定理 VI. $K \cap L \subset L \cap K$

提示：这个证明根据公理 IV 和定理 IV，并与定理 V 的证明相仿。

定理 VII. 如果 $L \subset M$，那么 $K \cup L \subset K \cup M$。

提示：設这一定理的題設成立，而推出下列的公式：

$$K \subset K \cup M \text{ 并且 } L \subset K \cup M$$

(第一个公式可由定理 III 直接得出，第二个公式则可以利用公理 II，由題設及定理 III 推出)。应用公理 III 于这些公式。

定理 VIII. 如果 $L \subset M$，那么 $K \cap L \subset K \cap M$。

提示：这个证明与前一定理的证明相仿。

定理 IX. $K \cap L \subset K \cap (L \cup M)$ 并且 $K \cap M \subset K \cap (L \cup M)$。

提示：在定理 III 中，将"K"换成"L"，将"L"换成"M"，然后再应用定理 VIII。

定理 X. $(K \cap L) \cup (K \cap M) \subset K \cap (L \cup M)$

提示：这一定理可由公理 III 及定理 IX 推出。

在以上定理的证明中起最重要的作用的公理 III 与 IV 称作合成律(对于类的加法和乘法而言)。

2. 在前一习题中所构造的类的运算中，我們可以引进等号“=”，幷定义如下：

定义 I. $K=L$ 当且仅当 $K\subset L$ 幷且 $L\subset K$。

試由习题 1 中的公理和定理以及上述定义推出下列定理：

定理 XI. $K=K$

提示：将定义 I 中的“L”换成“K”幷应用公理 I。

定理 XII. 如果 $K=L$, 那么 $L=K$。

提示：将定义 I 中的“K”换成“L”，将“L”换成“K”。将这样得来的結果与原来的定义 I 作比較。

定理 XIII. 如果 $K=L$ 幷且 $L=M$, 那么 $K=M$。

提示：这一定理可由定义 I 及公理 II 推出。

定理 XIV $K\cup K=K$

提示：将定义 I 中的“K”代之以“$K\cup K$”，幷将“L”代之以“K”；应用定理 I 及定理 III (其中“L”代之以“K”)。

定理 XV $K\cap K=K$

提示：这一証明与前一定理的証明相仿。

定理 XVI $K\cup L=L\cup K$

提示：由定理 V 我們有：

$$K\cup L\subset L\cup K \text{ 和 } L\cup K\subset K\cup L$$

对这些公式应用定义 I。

定理 XVII $K\cap L=L\cap K$

提示：这一証明与定理 XVI 的証明相仿。

定理 XVIII. $K\cap(L\cup M)=(K\cap L)\cup(K\cap M)$。

提示：这一定理可由定义 I，公理 V 与定理 X 推出。

定理 XIX $K\cup K'=\vee$

提示：这一定理可以借助于定义 I, 由公理 VI (其中“K”代之

以"$K\cup K'$")及公理 VIII 推出。

定理 XX $K\cap K'=\wedge$

提示：应用定义 I，公理 VII 和公理 IX。

注意这一习题和前一习題中的公理和定理哪些是第 IV 章(或者可能是第 III 章)中已經有的；回忆它們的名称。

3. 設在习題 1 与习題 2 中所討論的类的运算的系統中引进一个新符号"$)\!\!($"，用以代表类之間的某种关系，并定义如下：

$K)\!\!(L$ 当且仅当 $K\subset L$，$L\subset K$ 与 $K\cap L=\wedge$ 均不成立。

这样定义的关系是否与 §24 中所定义的有些关系相同？令符号"$)($"代表各类之間互不相交的关系。如何在我們的类的运算的系統中定义这一符号？

4. 試举出 §37 中所考虑的公理系統在算术及几何中的几种解釋。

由一切数构成的集合，加上小于关系是否是这一公理系統的一个模型？由一切直綫构成的集合加上直綫間的平行关系是否是这种模型之一？

5. 在 §37 中所討論的几何的片斷中，綫段間的較短关系可定义如下：

我們說 x 較 y 为短，記作：$x<y$，如果 x 与 y 是綫段并且如果 x 与一个綫段全等而这一綫段是 y 的一部分；換言之，如果 $x\in\mathbf{S}$，$y\in\mathbf{S}$ 并且如果存在 z 而使得 $z\in\mathbf{S}$，$z\subset y$，$z\neq y$ 并且 $x\cong z$。

区别这个句子中的被定义者与定义者。判定在定义者之中出現的詞項屬于什么学科(或者屬于邏輯的那一部分)。这一定义是否符合 §36 中的方法論的原則和 §11 中的定义規則？

6、如果只考虑 §15 中所讲的证明規則，§37 中定理 I 的证明是否是一个完全的证明？

7. 除定理 I 与 II 以外，下列的定理可由 §37 的公理中推出：

定理 III. 对于集合 S 中的任意的元素 x, y 与 z，如果 $x\cong y$ 并且 $x\cong z$，那么 $y\cong z$。

定理 IV. 对于集合 S 中任意的元素 x, y 与 z，如果 $x\cong y$ 并且 $y\cong z$，那么 $z\cong x$。

定理 V. 对于集合 S 中的任意的元素 x, y, z 与 t，如果 $x\cong y$，$y\cong z$，并且 $z\cong t$，那么 $x\cong t$。

对于下列的語句系統与公理 I 和 II 所組成的系統的等价性（如 §39 中所定义者）給以严格的证明（所以每一个都可以用来作为一个新的公理系統）：

(a) 由公理 I 与定理 I 和定理 II 所組成的系統；

(b) 由公理 I 与定理 III 所組成的系統；

(c) 由公理 I 与定理 IV 所組成的系統；

(d) 由公理 I 与定理 I 和定理 V 所組成的系統。

8. 按照 §37 中所讲的方法，陈述出关系理論的一般定律，作为前面习題中所得到的結果的推广。

提示：例如这些定律可以具有等値式的形式，而开头一段話为：

关系 R 是自反的并且在类 K 中具有性质 P，当且仅当…

9. 考虑习题 7 中的語句系統(a)、指出滿足下列条件的模型：

(a) 滿足这一系統的前两个語句，但不滿足末一个；

(b) 滿足第一个与第三个，但不滿足第二个；

(c) 滿足后两个，但不滿足第一个。

由三个語句中的任意两个可以推出其他一个，这样的模型是存在的，由这一事实可以得出什么結論？这些語句是否彼此独立？（參看 §37 与 §39）。

10. 有时候有这种抱怨，就是說，在不同的几何数本中有着差異，即有的教本中当作定理的語句，在其他教本中却采用作公理，从而不給出证明，这种抱怨有根据嗎？

*11. 在 §13 中我們熟悉了眞值表的方法，这一方法使我們能够在任一特殊情形中判定語句演算中的一个給定的語句是否是眞的，因而是否可以承认为这一演算中的一条定律。在应用这一方法时，对于那些在眞值表中出現的符号“T”与“F”，我們可以完全忘却原来賦与它們的意义，我們可以設定，这一方法主要是在构造語句演算时应用两条規則，第一条接近于定义的規則，第二条接近于证明的規則。按照第一条規則，如果我們要在語句演算中引进一个常項，我們必須构造出包含这个項的最簡单的(同时也是最一般的)語句函項的基本眞值表。按照第二条規則，如果我們要肯定一个語句(只包含那些基本眞值表已經构造出来的常項)是語句演算的定律，我們必須为这个語句构造出一个导出眞值表幷证实符号“F”在这个表的末一行中从不出現。

只用这两条規則构造出来的語句演算具有与形式化的演繹理論相近的性质。試根据 §40 中所讲的来证明这一命題。但注意这一构造語句演算的方法与 §36 中所討論的构造演繹理論的一般原則的不同之处。利用現在所考虑的方法，是否可能在語句演算中分別基本詞項与被定义詞項？有哪些区别在这里分不出来？

*12. 应用上一习題中所描述的眞值表方法，我們可以在語句演算中引入一些在第 II 章中沒有討論的新的詞項，例如我們可以引进符号“△”，而将下列語句函項：

$$p \triangle q$$

看作

既非 p 又非 q

这一表达式的縮写。

构造出符合符号“△”的直观意义的眞值表，并且借助于导出眞值表，证实下列的語句是眞的并且可以肯定为語句演算的定律：

$(\sim p)\leftrightarrow(p\triangle p)$

$(p\vee q)\leftrightarrow[(p\triangle q)\triangle(p\triangle q)]$

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow\{[(p\triangle p)\triangle q]\triangle[(p\triangle p)\triangle q]\}$

*13. 存在一个将語句演算构造成为一个形式化的演繹理論的方法，这个方法与习題 11 中所描述的不同，而完全符合 §36 与 §40 中所提出的原則①。例如我們可以設符号“→”，“↔”与“～”为基本詞項，并設下列七个語句为語句演算的公理：

公理 I. $p\rightarrow(q\rightarrow p)$

公理 II. $[p\rightarrow(p\rightarrow q)]\rightarrow(p\rightarrow q)$

公理 III. $(p\rightarrow q)\rightarrow[(q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)]$

公理 IV. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow q)$

公理 V. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$

公理 VI. $(p\rightarrow q)\rightarrow[(q\rightarrow p)\rightarrow(p\leftrightarrow q)]$

公理 VII. $[(\sim q)\rightarrow(\sim p)]\rightarrow(p\rightarrow q)$

其次，我們同意在证明中应用两条推理規則，这两条規則是我們已經熟悉的，即代入規則与分离規則。（为了十分精确地陈述这些規則，特别是代入規則，我們必須确定用括弧的方法，并規定在我們的演算中，把那些表达式看作是語句函項，从而可以用来替换变項。这項工作是不太困难的。）

借助于这些推理規則，我們現在可以从我們的公理推出一些

① 这个方法来源于弗萊格(参閱第 16 頁注②)。

定理、給出下列定理的完全证明（利用在它們后面的提示。）

定理 I. $p\to p$

提示：在公理 I 与 II 中，以"p"代替"q"；注意这样得出来的第一个語句与第二个語句的前件完全一样，于是应用分离規則。

定理 II. $p\to\{(p\to q)\to[(p\to q)\to q]\}$

提示：在公理 I 中，用"$(p\to q)$"代替"q"；在公理 III 中将"p"，"q"与"r"分别代之以"$(p\to q)$"，"p"及"q"，注意这样得到的第一个蘊函式的后件与第二个蘊函式的前件相同。現在在公理 III 中，用第二个蘊函式的前件代替"q"并且用它的后件代替"r"（作为第一个蘊函式的前件的"p"不变）。然后应用分离規則两次——这一证明是以公理 III 为根据的推理的标准例子，而公理則 III 是假言三段論定律的另一形式（参看 §12）。

定理 III. $p\to[(p\to q)\to q]$

提示：这一证明与定理 II 的证明相仿。利用代入由公理 II 推出下列語句：

$$\{(p\to q)\to[(p\to q)\to q]\}\to[(p\to q)\to q]$$

将这一語句的前件与定理 II 的后件作比較；于是在公理 III 中作适当的代入，并应用分离規則两次。

定理 IV. $[p\to(q\to r)]\to[q\to(p\to r)]$

提示：利用代入由公理 III 推出下列語句：

(1) $$[p\to(q\to r)]\to\{[(q\to r)\to r]\to(p\to r)\}$$

其次，在公理III中，将"p"，"q"与"r"分别代之以"q"，"$[(q\to r)\to r]$"与"$(p\to r)$"。注意这样推出来的蘊函式的前件可以在定理 III 中进行代入而得到。进行这一代入并应用分离規則而推出：

(2) $$\{[(q\to r)\to r]\to(p\to r)\}\to[q\to(p\to r)]$$

注意 (1)的后件与 (2)的前件相同；然后像定理 II 的证明中一

样来进行(再应用公理 III)——定理 IV 称作交换律。

定理 V. $(\sim p)\rightarrow(p\rightarrow q)$

提示：利用代入由公理 I 得出

$$(\sim p)\rightarrow[(\sim q)\rightarrow(\sim p)]$$

注意这一語句的后件与有一条公理的前件相同，然后像定理 II 的证明中一样去做。

定理 VI. $p\rightarrow[(\sim p)\rightarrow q]$

提示：在定理 IV 中进行代入而使由此得到的蘊函式的前件将是定理 V，然后应用分离規則——我們在这里有着一个以交换律为根据的推理的标准的例子。

定理 VII. $[\sim(\sim p)]\rightarrow(q\rightarrow p)$

提示：这一证明与定理 II 的证明相仿。由定理 V 及公理 VII 推出：

$[\sim(\sim p)]\rightarrow[(\sim p)\rightarrow(\sim q)]$和$[(\sim p)\rightarrow(\sim q)]\rightarrow(q\rightarrow p)$

比較这些語句的前后件。

定理 VIII. $[\sim(\sim p)]\rightarrow p$

提示：与定理 VI 的证明一样，先由定理 IV 与 VII 中推出下列語句：

$$q\rightarrow\{[\sim(\sim p)]\rightarrow p\}$$

在这一語句中，用我們的公理中的任一条代替"q"，并应用分离規則。

定理 IX. $p\rightarrow[\sim(\sim p)]$

提示：在公理 VII 及定理 VIII 之中进行适当代入，使得可以应用分离規則。

定理 X. $[\sim(\sim p)]\leftrightarrow p$

提示：在公理 VI 中进行代入并应用分离規則两次，就可以

从公理 VI 与定理 VIII 和定理 IX 推出这一定理。

*14. 如果要能够在前面习題所描述的語句演算的系統中引进被定义的詞項，我們必須假定一条定义的規則。按照这条規則（参看§11），每一定义都具有等值式的形式。被定义者是一个表达式，其中除語句变項外，只包含一个常項，即被定义的詞項；并且沒有一个符号在这个表达式中可以出現两次。定义者是一个任意的語句函項，其中剛好包含着与被定义者之中相同的变項，并且所包含的常項只限于基本詞項和前面已定义的詞項，例如，我們可以承认下列关于符号“$\vee$”与“$\wedge$”的定义：

定义 I. $(p\vee q)\leftrightarrow[(\sim p)\rightarrow q]$

定义 II. $(p\wedge q)\leftrightarrow\{\sim[(\sim p)\vee(\sim q)]\}$

借助于代入規則和分离規則，由上述定义以及习題 13 中的公理和定理，推出下列的定理：

定理 XI. $[(\sim p)\rightarrow q]\rightarrow(p\vee q)$

提示：在公理V中，以“$(p\vee q)$”代替“p”并且以“$[(\sim p)\rightarrow q]$”代替“q”；将这样得出的語句与定义 I 作比較并应用分离規則。

定理 XII. $p\vee(\sim p)$

提示：应用代入規則两次和分离規則一次，可以从定理 XI 和定理 I 中推出这一定理。

定理 XIII. $p\rightarrow(p\vee q)$

提示：这一証明是建立在公理 III 和定理 VI 与定理 XI 之上的，并与定理 II 的証明很相似（只对于公理 III 应用了代入規則）。

定理 XIV. $(p\wedge q)\rightarrow\{\sim[(\sim p)\vee(\sim q)]\}$

提示：这一建立在公理 IV 和定义 II 之上的証明是与定理 XI 的証明相似的。

定理 XV. $\{\sim[\sim(p\wedge q)]\}\rightarrow\{\sim[(\sim p)\vee(\sim q)]\}$

提示：这一证明是建立在公理III和定理VIII与定理XIV之上的，并与定理II的证明相仿。在定理VIII中，以“$(p\wedge q)$”代替“p”并将由此得来的蘊函式的后件与定理XIV的前件相比較。

定理XVI. $[(\sim p)\vee(\sim q)]\rightarrow[\sim(p\wedge q)]$

提示：在公理VII中进行代入，使得由此得来的蘊函式的前件成为定理XV。

定理XVII. $(\sim p)\rightarrow[\sim(p\wedge q)]$

提示：这一证明是与定理II的证明相仿的。在定理XIII中以“$(\sim p)$”代替“p”，以“$(\sim q)$”代替“q”；并将由此得来的語句与定理XVI相比較。

定理XVIII. $(p\wedge q)\rightarrow p$

提示：由公理VII及定理XVII中推出此定理。

注意这一习題和前一习題中的公理和定理那些是我們在第II章中已經熟悉的，并回忆它們的名称。

*15. 按照前一习題中給出的定义规則，陈述符号“$\triangle$”的定义（参看习題12），在定义者之中必須出現两个常項：“$\sim$”与“$\wedge$”。

*16. ㈢㈧ 利用眞值表的方法证明习題13与14中所有的公理与定义、以及习題15中提出的定义都是眞的語句。試由此作出下列的結論，即所有应用代入規則与分离規則由上述的公理与定义推出的定理在用眞值表方法加以檢驗时都被发現为眞的語句。

（也可以证明，語句演算中每一个眞实性可用眞值表方法加以证实的語句或者是公理和定义中的一条，或者是可以利用我們的推理規則由它們推出，因此，在习題11，13和14中所討論的两种构造語句演算的方法是完全等值的，但这項工作要困难得多。）

*17. 习題11，13，14中所討論的构造語句演算的方法之中有一种提供了这一演算的判定問題（参看§41）的解法，并且使我們

能够很容易説明，語句演算是一种无矛盾的演繹的理論。这个方法是什么？并且如何説明？

*18. 語句演算中有下列的定律：

对于任意的 p 与 q，如果 p 并且非 q，那么 q。

試在这条邏輯定律的基础上，建立下列的方法論的定律：

如果一个以語句演算为前提的演繹的理論的公理系統是矛盾的，那么用这个理論的詞項陈述的所有語句都可以由这个系統中推出来。

*19. ㊅㊆ 已知下列方法論的定律成立：

如果一个演繹的理論的公理系統是完全的，并且如果在这个系統中加进了一个語句，这个語句是可以在这个理論中陈述出来，但不能加以证明的，那么这样扩充了的公理系統不再是无矛盾的。

为什么？

*20. 把第(II)章中那些按照 §42 中所讲的应当屬于演繹科学方法論范圍的詞項挑出来。

第二部分 邏輯和方法論在构造数学理論中的应用

(VII) 一个数学理論的构造：数的次序的定律

§43. 构造中的理論的基本詞項；关于数与数之間基本关系的公理

有了邏輯和方法論領域的一些知識供我們使用，我們現在来着手建立一个特殊的、并且非常初等的数学理論的基础。对于我們，这将是一个很好的机会，来較好地消化我們以前获得的知識，甚至略略加以扩充。

我們将着手的理論构成实数算术的一小部分。它包括关于数与数之間小于和大于两个基本关系的主要定理，以及数的加法和减法两个基本运算的主要定理。它不假定邏輯以外的任何东西。

在这个理論中，我們将要采取的基本詞項如下：

实数，

是小于，

是大于，

和。

像早先一样，我們将簡单地說“数”来代替“实数”。并且以“所有的数构成的集合”这一表达式来代替“数”这一詞項作为基本詞項，要更方便一些。为簡单起見，我們将用符号“**N**”来代替“所有的数构成的集合”这一表达式；这样，要表示 x 是一个数，我們就写：

$$x \in \mathbf{N}。$$

另一方面，我們可以規定，我們的理論的論域只包括实数，而且变

項“x”，“y”，…只代表数的名字；在这种情形下，“实数”这一个詞項在表示我們的理論的命題时，将完全可以省去，而当需要的时候，符号“N”可以代之以“$\vee$”(参看 §23)。

“是小于”和“是大于”这两个表达式的每一个，将要当作只由单个的字組成的实体来处理；它們将分别地为比較簡单的符号“$<$”和“$>$”所代替，我們也将用习用的符号“$\nless$”和“$\ngtr$”来代替“不小于”和“不大于”。此外，我們将使用习用的符号

$$x+y$$

来代替“数(被加数)x 与 y 之和”或“x 与 y 相加的結果”。

于是，符号“N”就指一个集合，符号“$<$”和“$>$”指两个二項关系，最后，符号“$+$”指一个二項运算。

我們所考虑的理論的公理可以分成两类，第一类公理表示小于和大于两种关系的基本性质，至于第二类公理，則主要是关于加法的基本性质。現在我們将只考虑第一类公理；它总共包括五个命題：

公理 1. 对于任何数 x 和 y (也就是，对于集合 N 的任意二元素)我們有：$x=y$ 或者 $x<y$ 或者 $x>y$。

公理 2. 如果 $x<y$，那么 $y\nless x$。

公理 3. 如果 $x>y$，那么 $y\ngtr x$。

公理 4. 如果 $x<y$ 而且 $y<z$，那么 $x<z$。

公理 5. 如果 $x>y$ 而且 $y>z$，那么 $x>z$。

就像具有普遍性质的、陈述任意数 x, y, …有如此这般一种性质的任何算术定理一样，这里所列举的公理实在应該以这样的字句如“对于任何数 $x, y, \cdots$”或者“对于集合 N 的任何元素 x, y, …”或更簡单地，“对于任何 x, y, …”(如果我們同意这里的变項“x”，“y”，…只指数) 开始，但是因为我們要遵从 §3 所討論

的用法，我們常常略去这样的短語，而只是在我們的心中加上它；这一点不仅适用于公理，也适用于在我們的討論过程中将要出現的定理和定义。例如，公理 2 的意思是：

对于任何 x 与 y（或者对于集合 **N** 的任何元素 x 与 y），如果 $x<y$，那么 $y \nless x$。

我們将称公理 1 为弱三分律（以后我們将熟悉强三分律），公理 2—5 表示关系小于和大于是不对称的和傳遞的（参看 §29）；因而它們被称作关系小于和大于的**不对称律**和**傳遞定律**。第一类公理以及从它們推出来的定理被称为**数的次序定律**。

关系 $<$ 和 $>$ 以及邏輯上的同一关系 $=$，在这里将被称作**数之間的基本关系**。

§44. 基本关系的不自反律；間接证明

我們的下一步工作是从我們所采取的公理推演出一些定理。因为我們的目的不在系統的介紹，本章和下章将只陈述这样一些定理，它們足以說明邏輯領域和方法論領域的某些基本概念和事实。

定理 1. 沒有一个数小于它自己：$x \nless x$。

证明：假定我們的定理是假的。那么必定有一个数 x，适合公式：

(1) $$x<x。$$

現在公理 2 涉及的是任意的数 x 和 y（两者不必不同），因此，如果在"y"的位置我們写作变項"x"，公理仍然正确；于是我們得到：

(2) $$\text{如果 } x<x\text{，那么 } x \nless x。$$

但是从(1)和(2)立即推出

$$x \nless x;$$

然而，这个推論显然与公式(1)矛盾。所以，我們必須否定原来的假

定，并且承认定理已經证明。

現在我們来表明，如何把这个論证变为一个完全的证明，为清楚起見，我們使用邏輯符号（参看 §13 和 §15）。为了变成完全的证明，我們借助于語句演算中所謂的归謬律：

(I)　$[p\to(\sim p)]\to(\sim p)$①

我們再用符号化的公理 2：

(II)　$(x<y)\to[\sim(y<x)]$

我們的证明完全建立于語句(I)和(II)之上。首先，我們应用代入規則于(I)，将其中的"p"全都代換以"$(x<x)$"：

(III)　$\{(x<x)\to[\sim(x<x)]\}\to[\sim(x<x)]$

其次，我們应用代入規則于(II)，将其中的"y"代換以"x"：

(IV)　$(x<x)\to[\sim(x<x)]$

最后，我們注意，語句(IV)是条件語句(III)的假設，因此可以应用分离規則，这样我們就得到公式：

(V)　$\sim(x<x)$,

这就是所要证明的定理的符号形式。

定理 1 是所謂的間接证明，也称为归謬证明的一个例子。这种证明的特点可以一般地描述如下：要证明一个定理，我們先假定这个定理是假的，然后从这个假定推演出一些結論，它們迫使我們否定原先的假定。在数学中，間接证明非常普遍。不过，它們并不完全屬于定理 1 的证明的那种模式；相反地，定理 1 的证明代表間接证明的一种比較少見的形式，下面我們将要遇見間接证明的比較

① 这个定律，以及与之具有同名的、相关的定律：

$$[(\sim p)\to p]\to p,$$

在邏輯和数学的許多复杂的、和历史上重要的論证中，曾經应用过。意大利的邏輯家和数学家伐拉第(G. Vailati, 1863—1909)有一篇专論，专門論述它的历史。

典型的例子。

我們所采取的公理系統，对于"$<$"和"$>$"两个符号而言，是完全对称的。因此，对于每个关于小于关系的定理，我們机械地得到相应的、关于大于关系的定理，证明完全类似，因而第二定理的证明全部可以省略。相应于定理1我們有：

定理2. 沒有一个数大于它自己：$x \ngtr x$。

至于同一关系$=$，如我們从邏輯中知道的，是自反的，定理1和2表明，数之間的另外两种基本关系，$<$和$>$，是不自反的；因之，这些定理被称为(关系小于和大于的)不自反律。

§45. 基本关系的其它定理

下一步我們将证明以下定理：

定理3. $x>y$，当且仅当，$y<x$。

证明：我們必須证明，公式：

$$x>y \quad 与 \quad y<x$$

等价，也就是說，证明：第一公式蘊函第二公式，而且反之亦然（参看§10）。

首先，假定

$$(1) \qquad y<x,$$

依据公理1，在以下三种情形中，我們必定至少有一种：

$$(2) \qquad x=y, \quad x<y \quad 或 \quad x>y。$$

如果我們有$x=y$，由于同一理論的基本定律，即萊布尼茲定律（参看§17），我們可以以"y"代换公式(1)中的变項"x"；得到的公式

$$y<y$$

与定理1矛盾，因此我們有：

$$(3) \qquad x \neq y。$$

但是我們又有：

(4) $$x \nless y,$$

因为，根据公理 2，公式

$$x<y \quad \text{与} \quad y<x$$

不能同时成立。由于(2)，(3)和(4)，我們发現，必須应用第三种情形：

(5) $$x>y。$$

这样，我們已經证明，公式(5)为公式(1)所蘊函；反过来，相反方向的蘊函式可以用类似的方法建立，因此，两个公式眞正等价，q. e. d.①

使用关系演算(参看 §28)的术語，我們可以說，按照定理 3，关系 $<$ 和 $>$ 其中的一个是另一个的逆关系。

定理 4. 如果 $x \neq y$，那么 $x<y$ 或者 $y<x$。

证明。因为

$$x \neq y,$$

据公理 1，我們有：

$$x<y \quad \text{或者} \quad x>y;$$

据定理 3，以上公式中的第二式蘊函：

$$y<x。$$

因此我們有：

$$x<y \quad \text{或者} \quad y<x。$$ q. e. d.

与此类似，我們能够证明，

定理 5. 如果 $x \neq y$，那么 $x>y$ 或者 $y>x$。

据定理 4 和 5，关系 $<$ 和 $>$ 是連通的；因之，这些定理被称为

① "q. e. d." 是 "quod erat demonstrandum" 一語的通常簡写，意思是"这就是所要证的"。

(关系小于和大于的) 連通性定律。公理 2—5 以及定理 4 和 5 一起表明，数的集合 N 为关系 $<$ 和 $>$ 两者中的一个排成一定次序。

定理 6. 任何数 x 和 y 滿足，且只滿足 $x=y$, $x<y$ 和 $x>y$ 三个公式中的一个。

证明。由公理 1 推出，所說的三个公式至少有一个必須被滿足。为了证明公式：

$$x=y \quad 与 \quad x>y$$

互相排斥。我們就像在定理 3 的证明中那样进行：在以上两个公式的第二个公式中，以"y"代"x"而得到一个公式与定理 1 相矛盾。同样地可以证明，公式：

$$x=y \quad 与 \quad x>y$$

互相排斥。最后，两个公式：

$$x<y \quad 与 \quad x>y$$

不能同时成立，因为，否则，据定理 3 我們将有：

$$x<y \quad 与 \quad y<x$$

与公理 2 矛盾。因此，任何数 x 和 y 只滿足所說三个公式中的一个而不能更多，q. e. d.

我們将称定理 6 为强三分律，或者簡单地，三分律；按照这个定律，在任何两个已給的数之間，三种基本关系之一，并且只有其中之一，成立。用 §7 中所提出的意义下的成語"或者…或者"，我們可以比較精确地将定理 6 表示为：

对于任何数 x 和 y，我們有：

或者 $x=y$ 或者 $x<y$ 或者 $x>y$。

§46. 数之間的其它关系

基本关系以外，还有三种其它的关系在算术中占据重要的地

位。其中之一是我們已經知道的邏輯上的相異关系≠；另外两种是現在将要討論的≦和≧关系。

符号“≦”的意义由以下定义說明：

定义 1. 我們說，$x \leqq y$，当且仅当 $x=y$ 或者 $x<y$。

公式

$$x \leqq y$$

讀作："x 是小于或等于 y"或者"x 至多等于 y"。

虽然以上定义的內容看来是清楚的，經驗表明，在实际应用中，它有时是某些誤解的根源。一些人相信他們自己十分清楚地了解符号“≦”的意义，然而反对将它应用于确定的数。他們不仅否认这种公式，如：

$$1 \leqq 0,$$

认为它显然錯誤——这的确是如此——，而且还认为这样一些公式，如像：

$$0 \leqq 0 \quad 或 \quad 0 \leqq 1$$

是沒有意义的，甚或是假的；因为，他們主張，旣然知道 $0=0$ 和 $0<1$，那么，說 $0 \leqq 0$ 或 $0 \leqq 1$ 就是沒有意义的。換句話說，在他們看来，不可能举出一对数适合公式：

$$x \leqq y。$$

这种看法显然錯誤，正因为 $0<1$ 成立，所以語句

$$0=1 \quad 或 \quad 0<1$$

眞，因为两个語句的析取式必定是眞的，假定其中的一个是眞的（参看 §7）；但是依照定义 1 这个析取式等价于公式：

$$0 \leqq 1。$$

由于完全类似的理由，公式：

$$0 \leqq 0$$

也眞。

这些誤解的根源大概在于日常生活的某些习惯(*这一点在§7之末我們已經提請注意*)。在日常語言中，只有当我們知道两个語句中有一个是眞的，但不知道那一个是眞的时，才习惯于断定两个語句的析取式。既然我們能够作出比較簡单，同时在邏輯上更强的断定，即 $0<1$，我們就不会說，$0=1$ 或 $0<1$，虽然这无疑是眞的。然而，在数学的討論中，在最强的可能形式下陈述我們所知道的事情，并不常常是有利的。例如，有时我們对一个四角形仅仅断言它是一个平行四边形，虽然我們知道它是一个正方形，所以这样做，因为我們可能要引用一个关于任意的平行四边形的普遍定理。为了同样的理由，可能有这样的情形，已經知道一个数 x（例如，数0)小于1，我們仍然可以只說 $x\leqq 1$，也就是，

$$x=1 \text{ 或 } x<1。$$

現在我們将陈述两个关于关系≦的定理。

定理 7. $x\leqq y$，当且仅当 $x \ngtr y$。

证明。这个定理是定理 6，即三分律的一个直接推論。事实上，如果

(1) $$x\leqq y,$$

因而，据定义 1，

(2) $$x=y \text{ 或 } x<y,$$

那么公式：

$$x>y$$

不能成立。反之，如果

(3) $$x \ngtr y,$$

我們必定有 (2)，因而，再据定义 1，公式 (1) 必定成立。于是公式(1)和(3)等价，q. e. d.

用 §28 的术語，定理 7 說，关系 $\leqq$ 是关系 $>$ 的否定关系。

由于本身的結构，定理 7 可以看作是符号“$\leqq$”的定义；它与这里所采取的定义不同，但与之等价。这个定理的陈述可能有助于驅散关于符号“$\leqq$”的用法的最后的疑惑；因为，沒有人会有任何犹豫来承认这样一些公式，如：

$$0 \leqq 0 \quad 和 \quad 0 \leqq 1$$

为眞，由于它們等价于公式：

$$0 \not> 0 \quad 和 \quad 0 \not> 1。$$

如果我們願意，我們完全可以避免使用符号“$\leqq$”，因为总是可以用“$\not>$”来代替它。

定理 8. $x < y$，当且仅当 $x \leqq y$ 且 $x \neq y$，

証明。如果

(1) $$x < y,$$

那么，据定义 1，

(2) $$x \leqq y,$$

而根据三分律，公式：

$$x = y$$

不能成立。反之，如果公式(2)成立，那么据定义 1，我們得到：

(3) $$x < y \quad 或 \quad x = y;$$

但如果同时我們有：

$$x \neq y,$$

那么我們必須承认，析取式(3)的前一部分，即，公式(1)。因之，两个方向的蘊函式成立，q、e、d.

我們将略去关于关系 $\leqq$ 的一些其它定理；其中特别包括那些說这个关系是自反和傳递的定理。这些定理的证明沒有一个有任何困难。

符号“≧”的定义完全与定义1类似；从关于关系≦的定理，我們机械地得到关于关系≧的相应的定理，只須将符号“≦”，“<”和“>”全部代之以符号“≧”，“>”和“<”。

在具有形式

$$x=y$$

的公式中，“x”和“y”的地位可以为常項、变項或表示数的复合表达式所代替，这种公式通常称为**等式**。具有形式

$$x<y \quad 或 \quad x>y$$

的公式则称为**不等式**（**在狭义的意义上的**）；在广义的意义上的不等式中，除以上形式的公式外，还有具形式

$$x \neq y, \quad x \leqq y \quad 或 \quad x \geqq y$$

的公式。在这些公式中，符号“=”，“<”等的左边和右边出現的表达式称为**等式的**或**不等式的左方和右方**。

练　习

1. 考慮人們中間的两种关系：身材較小和身材較大。一个任意的人的集合必須滿足什么条件，才使得这个集合与上面两种关系构成第一类公理的一个模型（参看§37）？

2. 令公式：

$$x ⧀ y$$

表示数 x 和 y 滿足下列条件之一：(i)数 x 的絕对值小于数 y 的絕对值，或(ii)如果 x 和 y 的絕对值相等，那么 x 是負的而 y 是正的。此外，令公式：

$$x ⧁ y$$

与公式：

$$y ⧀ x$$

具相同的意义。

在算术的基础上证明：所有的数构成的集合以及剛才定义的关系⧀和⧁构成第一类公理的一个模型。

在算术和几何的范圍內，給出这些公理的解釋的其它例子。

3. 从定理 1 推演以下定理：

如果 $x<y$，那么 $x\neq y$。

反之，不用任何其它的算术命题，从上述定理推演定理 1。这两个推論是否間接的，它們是否屬于 §44 定理 1 的证明的模式？

4. 推广 §44 定理 1 的证明，因而建立下列关系理論的一般定律（参看 §37 的注）：

在类 K 中每一个不对称的关系 R 在該类中也是不自反的。

5. 证明：如果取定理 1 作为一个新的公理，旧的公理 2 可以作为定理从这个公理和公理 4 推演出来。

作为这个論证的推广，证明以下关系理論的一般定律：

在类 K 中不自反和傳递的关系 R 在該类中也是不对称的。

*6. 在 §44 的末尾我們曾經試图解釋，何以定理 2 的证明可以省略。这些說明是第（Ⅵ）章的某些一般討論的应用。請詳細闡釋这一点，特别請指明和这一点有关的那些討論。

7. 从第一类公理推演下列定理：

(a) $x=y$，当且仅当，$x\not<y$ 而且 $y\not<x$；

(b) 如果 $x<y$，那么 $x<z$ 或 $z<y$。

8. 从公理 4 和定义 1 推演下列定理：

(a) 如果 $x<y$ 而且 $y\leqq z$，那么 $x<z$；

(b) 如果 $x\leqq y$ 而且 $y<z$，那么 $x<z$；

(c) 如果 $x\leqq y$，$y<z$ 而且 $z\leqq t$，那么 $x<t$。

9. 证明关系 $\leqq$ 和 $\geqq$ 是自反的、傳递的和連通的。这些关系是

对称的还是不对称的？

10. 证明：在任何两个数之間，以下六种关系恰恰有三种成立：$=$，$\nless$，$>$，$\neq$，$\leq$和$\geq$。

11. 上題所列举的关系的任何一种的逆关系和否定关系，还是在六种关系之中。請詳細证明这一点。

*12. 第10題給出的六种关系中，那两种之間存在着包含关系？在这些种关系中，任何一对的和、积及相对积是什么？

提示：回忆§28中所解釋的名詞。不要忘了討論两个相同的关系所組成的对子，并且記住相对积与因子的次序有关（参看第V章练习5）。36对关系都应該加以考察。

(VIII) 一个数学理論的构造：加法和减法的定律

§47. 关于加法的公理；运算的一般性质，群和交換群的概念

現在我們轉向第二类公理，它由以下六个語句所組成：

公理6. 对于任何数 y 和 z，有一个数 x，使得 $x=y+z$；換言之：如果 $y\in\mathbf{N}$，而且 $z\in\mathbf{N}$，那么 $y+z\in\mathbf{N}$。

公理7. $x+y=y+x$。

公理8. $x+(y+z)=(x+y)+z$。

公理9. 对于任何数 x 和 y，有一个数 z，使得 $x=y+z$。

公理10. 如果 $y<z$，那么 $x+y<x+z$。

公理11. 如果 $y>z$，那么 $x+y>x+z$。

此刻让我們集中注意于这第二类的头四个語句，即，公理6—9，它們給加法运算規定一些簡单的性质，在邏輯和数学的一些部

分中，討論其它运算时，也常常会遇到这些性质。

一些特殊的名詞已經引用来指示这些性质。我們說运算O在类K中是可行的，或类K在运算O之下是閉的，如果施运算O于类K的任何二个元素，結果还是得到类K的一个元素；換句話說，如果对于类K的任何二个元素y与z，有一个类K的元素x，使得

$$x=yOz。$$

运算O称为在类K中是交換的，如果施这种运算于类K的元素，所得的結果与这些元素的次序无关，或者，換句話說，如果对于这一类的任何两个元素x与y，我們有：

$$xOy=yOx。$$

运算O在类K中是結合的，如果运算的結果与元素結合在一起的方式无关，或者，更精确地說，如果这一类的任何三个元素x, y与z满足条件：

$$xO(yOz)=(xOy)Oz。$$

运算O称为在类K中是右可反的或者左可反的，如果，对于类K的任何两个元素x与y，永远有这一类的一个元素z，使得

$$x=yOz \quad 或 \quad x=zOy$$

分别成立。一个运算O既是右可反的，又是左可反的，簡单地就称为在类K中可反的。立刻可以得出，一个右可反的或左可反的交換运算，必定是可反的。現在，我們說，一个类K对于运算O是一个群，如果这个运算在K中是可行的，結合的和可反的；如果，此外，运算O还是交換的，那么类K称为是对于运算O的一个交換群或阿貝尔群。群的概念以及交換群的概念构成一个特殊的数学学科的对象，这个学科就称为群論，群論在第Ⅴ章已經提到。①

① 群的概念为法国数学家伽罗华(E. Galois, 1811—1832)引进数学中，“阿貝尔群”这个詞是选来紀念挪威数学家阿貝尔(N. H. Abel, 1802—1829)的，他的研究对于

假定类K是全类(或者是所討論的理論的論域——参看§23)，当我們使用“可行的”，“交換的”等語詞时，我們通常不提到这个类。

按照上面引入的术語，公理 6—9 分別被称为可行性定律、交換律、結合律和加法运算的右可反性定律；这些公理一起說明，所有的数构成的集合是一个对于加法而言的交換群。

§48. 对于較多的被加数的交換律和結合律

公理 7，即交換律，和公理 8，即結合律，在这里所陈述的形式中，分别地涉及两个和三个数，但是有无穷多个涉及多于两个或三个数的其它的交換律和結合律，例如，公式：

$$x+(y+z)=y+(z+x)$$

是对于三个被加数的交換律的一个例子，而公式：

$$x+[y+(z+u)]=[(x+y)+z]+u$$

是对于四个被加数的結合律的一个例子。此外，还有一些具混合性质的定理，一般地說，这些定理断定：被加数在次序和結合方面的任何一种变化，对于加法的結果不生影响，我們陈述下面的定理作为一个例子：

定理 9. $x+(y+z)=(x+z)+y$。

证明。經过适当的代入，由公理 7 和 8 我們得到：

(1) $$z+y=y+z,$$

(2) $$x+(z+y)=(x+z)+y。$$

按照萊布尼茲定律，由于(1)，我們可以用“$y+z$”代(2)中的“$z+y$”；結果是所要的公式：

$$x+(y+z)=(x+z)+y。$$

高等代数的发展有巨大的影响，群概念对于数学的深远的重要性，特别是自从另一位挪威数学家李(S. Lie, 1842—1899)的工作以来，已經为大家所认識。

用同样的方法，我們能够从公理 7 和 8，可能还有公理 6，推演出关于任意多个被加数的所有的交换律和結合律。这些定理在代数表达式的变换中实际上是常常用到的。所謂表示一个数的表达式的变换，就像通常一样，指这样一种变换，通过这种变换，得到一个表示相同的数的表达式，这个表达式因之可以同原来的表达式用等号联結起来；最常受到这种变换的表达式是那些含有变項，因而是指示函項的表达式。在交换律和結合律的基础上，我們能够变换任何具有这种形式：

$$x+(y+z),\quad x+[y+(z+u)],\quad \cdots$$

的表达式，也就是，为加号和括号所分开的数值常项和变項所組成的表达式；在任何这样的表达式中，我們可以任意地調换数值符号和括号（只須假定所得的表达式不会因括号的易位而变成沒有意义）。

§49. 加法的单調定律以及它們的逆定律

我們現在将要討論的公理 10 和 11 是所謂的对于关系小于和大于的加法的单調定律。更一般地，我們說，二項运算 O 在类 K 中对于二項关系 R 是单調的，如果，对于类 K 中任何元 x, y, z，公式：

$$yRz$$

蘊函

$$(xOy)R(xOz),$$

后一公式是說，施运算 O 于 x 和 y 所得的結果对于施运算 O 于 x 和 z 所得的結果有关系 R。（在非交换的运算的情形下，严格地說，我們应該区分右单調和左单調，剛才定义的称为右单調。）

加法运算不仅对于关系小于和大于是单調的——这是公理10 和 11 的一个推論——，并且对于 §46 中所討論的数之間的其它关

系也是单調的。这里我們将只对同一关系证明这一点：

定理 10. 如果 $y=z$，那么 $x+y=x+z$。

证明。和 $x+y$ 的存在为公理 6 所保证，它等于它自身（根据 §17 的定律 II）：

$$x+y=x+y。$$

由于本定理的假設，等式右边的变項“y”可以用变項“z”来代换，于是我們得到所要的公式：

$$x+y=x+z。$$

定理 10 的逆定理也是眞的：

定理 11. 如果 $x+y=x+z$，那么 $y=z$。

在这里我們将指出这个定理的两个证明的大致步驟。建立在三分律和公理 6，10 与 11 之上的第一个证明是比較簡单的。不过，为了我們后面的目的，我們需要另一个证明，这个证明比較起来相当复杂，但是除公理 7—9 外，不利用任何东西。

第一个证明。假定求证的定理是假的，那么一定有数 x，y 和 z，使得

(1) $$x+y=x+z,$$

而且

(2) $$y\neq z。$$

因为 $x+y$ 和 $x+z$ 是数（按照公理 6），根据三分律，它們只能滿足以下公式中的一个：

$$x+y=x+z,\quad x+y<x+z \quad 及 \quad x+y>x+z。$$

因为根据(1)，第一式成立，其它两式自动被消去。因此我們有：

(3) $$x+y\nless x+z \quad 及 \quad x+y\ngtr x+z。$$

另一方面，再一次应用三分律，我們可以从不等式(2)推論出

$$y<z \quad 或 \quad y>z。$$

因此，根据公理 10 和 11，

(4)　　$x+y<x+z$ 和 $x+y>x+z$。

(4)与(3)显然矛盾。假定于是被推翻，而定理应該认为已經証明。

*第二个証明。应用公理 9，但以"y"和"u"分别代换"x"和"z"，我們推出有一个数 u 满足公式：

$$y=y+u。$$

因为，根据公理 7，

$$y+u=u+y,$$

由于同一关系的傳递性(参看 §17 定律 IV)我們有：

(1)　　$y=u+y$。

現在再一次应用公理 9，但以"z"和"v"分别代换"x"和"z"；于是我們得到一个数 v 满足等式：

(2)　　$z=y+v$。

由于(1)，这里我們可以用表达式"$u+y$"代换变項"y"：

$$z=(u+y)+v。$$

此外，根据結合律，即公理 8，我們有：

$$u+(y+v)=(u+y)+v,$$

因此，应用 §17 的定律 V，我們得到：

$$z=u+(y+v)。$$

由于(2)，这里我們可以用"z"代换"$y+v$"(用萊布尼茲定律)，于是我們最后得到：

(3)　　$z=u+z$。

第三次应用公理 9，这一次以"u"，"x"和"w"分别代换"x"，"y"和"z"，我們得到一个数 w，对于 w，

$$u=x+w$$

成立，而因

$$x+w=w+x,$$

我們有：

(4) $$u=w+x。$$

利用(4)我們从(1)得到以下公式：

$$y=(w+x)+y;$$

但因根据結合律，我們有：

$$w+(x+y)=(w+x)+y,$$

这个公式变为：

(5) $$y=w+(x+y)。$$

由于本定理的假設，我們可以用“$x+z$”代換(5)中的“$x+y$”，这就导致：

(6) $$y=w+(x+z)。$$

再一次应用結合律，我們有：

$$w+(x+z)=(w+x)+z,$$

因此(6)变为：

$$y=(w+x)+z。$$

由于(4)，这里我們可以用“u”代換“$w+x$”。这样我們得到：

(7) $$y=u+z。$$

但是从等式(7)和(3)推出

$$y=z。$$ q. e. d.*

这里可以插入关于定理 11 的第一个证明的几点說明。像定理 1 的证明一样，定理 11 的第一个证明构成間接推論的一个例子，这个证明的輪廓可以描述如下。为了证明某一个語句，譬如說“p”，我們假設这个語句是假的，也就是，我們假定語句“非 p”，从这个假定推演出一个結論“q”；也就是說，我們证明蘊函式：

如果非 p，那么 q

(在所討論的情形中，結論“q”是在证明中出現的条件(3)和(4)的合取)。不过，另一方面，我們能够证明(或者根据邏輯的一般定律，就像在所討論的情形中那样，或者根据数学学科中先已证明的某些定理，这些定理的全部論证是在数学学科中作出的）所得的結論是假的，也就是“非 q”成立；因而我們被迫放棄原来的假定，而承认語句“p”是眞的。如果这个論证以完整的形式表示出来，一个邏輯定律将在其中起本质的作用，这个定律是我們从 §14 知道的逆反定律的一个变形，这个定律就是：

从：如果非 p，那么 q，推出：如果非 q，那么 p。

这里所討論的证明稍微不同于定理 1 的证明。在定理 1 的证明中，从定理假的假定，我們推論出定理是眞的，也就是，我們推演出一个与假定正相矛盾的結論；但是，在所討論的证明中，我們从一个类似的假定推演出一个結論，我們从其它理由知道这个結論是假的。不过这种差别不是本质的；根据邏輯定律，可以很容易地看出，定理 1 的证明——像任何其它的間接推論一样——可以归到上面大致描述的模式中。

和定理 10 一样，其它的单調定律，即，公理 10 和 11，也有逆定律：

定理 12. 如果 $x+y<x+z$，那么 $y<z$。

定理 13. 如果 $x+y>x+z$，那么 $y>z$。

这些定理的证明，可以沿着定理 1 的证明的綫索，很容易地得到。

§50. 閉語句系統

有一个一般的邏輯定律，熟悉这个定律可以大大簡化上面三个定理(11，12 和 13) 的证明。这个定律有时称为閉系統定律或豪

伯定律①，在某些情形下，当我們已經証明一些条件語句时，这个定律容許我們从这些語句的形式推論出：相应的逆語句也可以看作已經証明。

假定給了我們一些蘊函式，譬如三个蘊函式，对这三个蘊函式我們将給予以下大概的形式：

如果 p_1，那么 q_1；

如果 p_2，那么 q_2；

如果 p_3，那么 q_3。

这三个語句称为构成一个閉系統，如果它們的前件穷尽了所有可能的情形，也就是，如果

p_1 或 p_2 或 p_3

是眞的，并且如果同时它們的后件互相排斥：

如果 q_1，那么非 q_2；如果 q_1，那么非 q_3；如果 q_2，那么非 q_3。

閉系統定律断定，如果构成一个閉系統的某些条件語句是眞的，那么相应的逆語句也是眞的。

一个閉系統的最簡单的例子是两个語句的系統，这个系統包括一个蘊函式：

如果 p，那么 q，

和它的反語句：

如果非 p，那么非 q。

为了証明这种情形下的两个逆語句，甚至不必借助于閉系統定律；应用逆反定律就够了。

定理 10 和公理 10 与 11 构成三个語句的一个閉系統，这是三分律的一个推論；因为在任何两个数之間我們恰好有＝，＜和＞三

① 依德国数学家豪伯(K. F. Hauber, 1775—1851)的名字而命名。

种关系中的一种，我們知道这三个語句的假設，即，公式：

$$y=z,\ y<z,\ y>z,$$

穷尽所有可能的情形，而它們的結論，即，公式：

$$x+y=x+z,\ x+y<x+z,\ x+y>x+z$$

互相排斥。(三分律甚至蘊函了更多的东西，即，头三个語句不仅穷尽所有可能的情形，而且也互相排斥，后三个公式不仅互相排斥而且也穷尽所有可能的情形，不过这与我們的目的无关。)仅仅由于三个命題构成一个閉系統，逆定理 11—13 必定成立为眞。

在初等几何中可以找到許多閉系統的例子；例如，当我們考察两个圓的相对位置时，我們必須討論一个包括五个語句的閉系統。

最后，可以指出，任何人不知道閉系統定律，但是試图证明构成一个这种系統的命題的逆命題，可以机械地应用我們在定理 11 的第一个证明中所使用的同样的推理方式。

§51. 单調定律的推論

定理 10 和 11 可以合成一个語句：

$y=z$，当且仅当，$x+y=x+z$。

同样可以把公理 10 和 11 与定理 12 和 13 联結起来，这样得到的定理可以称为通过加法的等式和不等式的等价变換定律，这些定理的內容有时被描述如下：如果不改变等号或不等号，而以同一数加于一个等式或不等式的两边，所得的等式或不等式与原来的等价(自然，这种表示是不十分正确的，因为一个等式或不等式的两方不是数而是表达式，不可能加任何数于表达式上)，这里提到的定理在解等式和不等式时起着重要的作用。

我們将从单調定理推演出另一个結論：

定理 14. 如果 $x+z<y+t$，那么 $x<y$ 或者 $z<t$。

证明。假設这个定理的結論是假的；換句話說，x 既不小于 y，z 也不小于 t。根据三分律，从此推出以下两个公式之一：

$$x=y \quad \text{或} \quad x>y$$

以及以下两个公式之一：

$$z=t \quad \text{或} \quad z>t$$

必定成立。这样，我們必須討論以下四种可能：

(1) $x=y$ 而且 $z=t$，

(2) $x=y$ 而且 $z>t$，

(3) $x>y$ 而且 $z=t$，

(4) $x>y$ 而且 $z>t$。

让我們从考虑第一种情形开始。如果(1)的两个等式是正确的，根据定理 10，从第一个等式我們得到：

$$z+x=z+y,$$

而因为根据公理 7，

$$x+z=z+x \quad \text{而且} \quad z+y=y+z,$$

两次应用同一关系的傳递律，我們可以推論出：

(5) $x+z=y+z$。

如果現在我們应用定理 10 于(1)的两个等式的第二个，我們得到：

(6) $y+z=y+t$，

这个公式与(5)一起可得：

(7) $x+z=y+t$。

根据完全类似的推論——应用公理 4，5，10 和 11——，剩下的三种情形(2)，(3)和(4)的任何一种都导致不等式：

(8) $x+z>y+t$。

因此在任何情形下，公式(7)或(8)中的一个必定成立。但是因为 $x+z$ 和 $y+t$ 是数(公理 6)，根据三分律，推出公式：

$$x+z<y+t$$

不能成立。

如是，由于假定結論是假的，我們得到一个与定理的假設直接矛盾的公式。因此这个假定要推翻，而我們知道結論确实是从假設推出来的。

剛才处理的論证算在間接证明之列；除开一点非本质的改变，它可以归到 §49 中大致叙述的模式中，这个模式与定理 11 的第一个证明相关。不过从形式上考虑，这个論证的方法稍微不同于定理 1 和 11 的证明所遵从的方法。这个推論具有下列的模式。为了证明一个具有蘊函式形式的語句，譬如說，語句：

如果 p，那么 q，

我們假定这个語句的結論，即"q"是假的(而非全句是假的)；从这个假定，也就是，从"非 q"，推論出假設是假的，也就是"非 p"成立。換句話說，不去证明求证的語句，而是給出相应的逆反語句：

如果非 q，那么非 p

的一个证明，并且从此推論出原来語句的正确性。这种論证的根据要在語句演算的一个定律中寻找，这个定律是說，逆反語句的眞常常蘊函原来語句的眞(参看 §14)。

这种形式的推論在所有的数学学科中十分普遍；它們构成間接证明最普通的类型。

§52. 減法的定义；反运算

我們的下一步工作是表明，減法的概念能够引进我們的討論中来。有了这个目的在心中，我們将首先证明下面的定理：

定理 15. 对于任何两个数 y 和 z，恰恰有一个数 x，使得 $y=z+x$。

证明。公理9保证至少有一个数 x 适合公式：

$$y=z+x。$$

我們必須证明这样的数不多于一个；换句話說，滿足这个公式的任何两个数 u 和 v 相等。因此，令

$$y=z+u \quad 而且 \quad y=z+v。$$

这个公式直接蘊函（根据关系＝的对称律和傳递律）：

$$z+u=z+v,$$

根据定理11，从这个公式我們得到：

$$u=v。$$

于是，恰恰有一个数 x（参看§20），对于这个 x，

$$y=z+x, \qquad \text{q. e. d.}$$

以上定理說到的唯一的数 x，用以下符号：$y-z$ 表示；像通常一样，我們把它讀作"数 x 和 y 的差"或者"从数 y 减去数 z 的結果"。差这一概念的精确定义如下：

定义2. 我們說，$x=y-z$，当且仅当，$y=z+x$。

一个运算 I 称为运算 O 在类 K 中的右反运算，如果这两个运算 O 和 I 适合下列条件：

对于类 K 的任何元素 x，y 和 z，我們有：$x=yIz$，当且仅当，$y=zOx$。

类似概念：运算 O 的**左反运算**，可以依同样方法定义。如果运算 O 在类 K 中是交換的，它的两个反运算——右的和左的——相合，于是我們可以簡单地說运算 O 的反运算。按照这种用語，定义2表示，减法是加法的右反运算（或者簡单地說，反运算）。

§53. 被定义者包含等号的定义

*定义2是数学中非常普通的一种定义的一个例证。这种定义

給表示单个事物的符号，或者給表示在一些事物之上的一个运算(換句話說，具有一定数目的主目的函項)的符号規定意义。在每一个这样的定义中，被定义者具有等式的形式：

$$x=\cdots;$$

在这等式的右边是要定义的符号本身，还是由要定义的符号与一些变項“y”，“z”，…所构成的一个指示函項，要看这个符号表示单个的事物还是在一些事物之上的一个运算而定。定义者可能是任何形式的一个語句函項，这个函項包含有和被定义者之中相同的自由变項，这个函項說，事物 x——可能还有事物 $y,z,\cdots$——适合如此这般一个条件。定义2确立一个符号的意义，这个符号表示在两个数之上的一个运算。为了給出这种类型的定义的另一个例子，让我們陈述“0”的定义，这个符号是表示单个的数的。

我們說，$x=0$，当且仅当，对于任何数 y，公式：$y+x=y$ 成立。

我們所討論的这种类型的定义和一种危險相連；因为一个人在作出这种定义的时候，如果不加以足够的注意，他可能很容易遇到一种矛盾。一个具体的例子可以說明这一点。

让我們暫时离开我們現在的探討，而且假定在算术中我們已經有了乘号供我們使用，我們要利用乘号定义除号。为此，我們制定以下的定义，这个定义是一絲不差地依照定义2仿造的：

我們說，$x=y:z$，当且仅当，$y=z\cdot x$。

如果現在在这个定义中，我們以“0”替換“y”和“z”，而且首先以“1”然后以“2”替換“x”，又如果我們注意我們有公式：

$$0=0\cdot 1 \quad 与 \quad 0=0\cdot 2,$$

我們立即得到：

$$1=0:0 \quad 与 \quad 2=0:0。$$

但是因为等于同一个东西的两个东西相等，我們得到：

$$1=2,$$

这显然是无意义的。

不难举出这种現象的理由。在定义 2 和在这里考虑的商的定义中，定义者具有語句函項的形式，这个語句函項有三个自由变項"x"，"y" 和 "z"。对于每一个这样的語句函項，有一个三項关系与它对应，这个三項关系在数 x, y 和 z 之間成立，当且仅当，这些数满足那个語句函項(参看 §27)；而这正是定义的目的，定义的目的就在引进一个符号表示这种关系。但如一个人予被定义者以形式：

$$x=y-z \quad 或 \quad x=y:z,$$

那么，他預先假定这个关系是函項的(因而是一个运算，或者一个函項，参看 §34)，因此对于任何两个数 y 和 z，至多有一个数 x 与它們有所說的关系。不过，关系是函項的这一事实最初一点也不明显，因之必須首先建立。在定义 2 的情形下，这点我們做到了；但是在商的定义的情形下，我們沒有能做到，我們不能这么做，仅仅因为在某种例外的情形下，所說的关系不是函項的。因为，如果

$$y=0 \quad 而且 \quad z=0,$$

那么有无穷多个数 x，对于这个 x

$$y=z\cdot x。$$

因此，如果一个人想用以上形式表示商的定义，而不引进矛盾，他必須排除数 y 和 z 都是 0 的情形，——例如，在定义者之中插进一个附加的条件。

上面的討論把我們引导到以下的結論。在定义 2 类型的每一个定义的前面应該有一个完全相应于定理 15 的定理，就是說只有一个数 x 满足定义者的定理。(这里有个問題发生，是恰恰有一个数适当，还是至多有一个这样的数就够了。这个頗为困难的問題的討論此处从略。)*

§54. 关于减法的定理

在定义 2 和加法的定律的基础上，我們能够沒有困难地证明减法理論的一些基本定理，如同可行性定律，单調定律以及等式和不等式通过减法的等价变换定律。使所謂的代数和的变换成为可能的那些定理也在此列，所謂的代数和，就是，为“+”号、“−”号和括号（按照与括号的作用相同的特殊规則，括号常被省略）所分开的数值常項和变項所組成的表达式。下面的定理可以作为最后所說的那一类定理的一个例子：

定理 16. $x+(y-z)=(x+y)-z$。

证明。按照公理 9，对于 y 和 z，有一个数 u 与之对应，使得

(1) $$y=z+u;$$

按照定义 2，上式蘊函

(2) $$u=y-z。$$

从交换律我們有：

$$x+y=y+x。$$

由于(1)，右边的“y”可以用“$z+u$”代换，于是我們得到：

(3) $$x+y=(z+u)+x。$$

另一方面，从定理 9 推出：

(4) $$z+(x+u)=(z+u)+x。$$

但因等于同数的二数相等，我們能够从(3)和(4)推論：

(5) $$x+y=z+(x+u)。$$

現在，因为 $x+u$ 和 $x+y$ 是数（据公理 6），我們可以用“$x+u$”和“$x+y$”代换定义 2 中的“x”和“y”。(5)表明定义者被满足，因此被定义者必定也成立：

$$x+u=(x+y)-z。$$

由于(2)，如果現在我們以“$y-z$”代换上面等式中的“u”，我們最后得到：

$$x+(y-z)=(x+y)-z, \qquad \text{q.e.d.}$$

已經到达这个地方，現在我們終止这一小部分算术的构造。

练　　习

1. 考虑以下三个系統，每一个由一个集合、两种关系和一种运算所組成：

(a) 所有的数构成的集合，关系$\leqq$和$\geqq$，加法运算；

(b) 所有的数构成的集合，关系$<$和$>$，乘法运算；

(c) 所有正数构成的集合，关系$<$和$>$，乘法运算。

判定：这些系統中那些是公理1—11的系統的模型(参看§37)。

2. 考虑一任意直綫，我們称它为数綫；令这条綫上的点用字母“X”，“Y”，“Z”，…指示。在数綫上我們选一固定的起点O以及与O点不同的单位点U。現在令X与Y为綫上两个不同的点。我們考虑两个半綫，一个从O起始并且通过U，另一个从X起始并且通过Y，我們說点X在点Y的前面，用符号表示，为：

$$X \lessdot Y,$$

当且仅当，这两个半綫相同或者其中的一个——不論那一个——是另一个的部分，在这一情形下，我們也說点Y在点X的后面，写作：

$$Y \gtrdot X。$$

点Z称为点X和点Y的和，如果它滿足下列条件：(i)綫段OX与綫段YZ相合；(ii)如果$O \lessdot X$，那么$Y \lessdot Z$，但如$O \gtrdot X$，那么$Y \gtrdot Z$。点X与点Y的和写作：

$$X \oplus Y。$$

用几何定理证明：数綫上所有的点构成的集合（比較簡单地說，即，数綫本身），关系⊘和⊘，及运算⊕一起，构成我們所采取的公理系統的一个模型，因而这个系統在几何中有一个解釋。

3. 让我們考虑四种运算 A, B, G 和 L，它們——像加法一样——使一个数对应于任何两个数。我們永远把数 x 看作施运算 A 于数 x 和 y 的結果，把数 y 看作施运算 B 于数 x 和 y 的結果：

$$x\mathbf{A}y=x, \quad x\mathbf{B}y=y。$$

我們以符号“$x\mathbf{G}y$”和“$x\mathbf{L}y$”分别表示 x 和 y 两个数之中那不小于或不大于另一个数的数；如此，我們有：

$$x\mathbf{G}y=x \text{ 及 } x\mathbf{L}y=y, \text{ 如果 } x \geqq y;$$

$$x\mathbf{G}y=y \text{ 及 } x\mathbf{L}y=x, \text{ 如果 } x \leqq y。$$

§47 中所討論的性质有那一些屬于这四种运算？对于这四种运算中的任何一种，所有的数构成的集合是否构成一个群，特别是，一个交換群？

4. 令 C 是所有点集的类，也就是，所有几何图形的类。集合的加法和乘法（如在 §25 中定义的）在类 C 中是可行的，交換的，結合的和可反的嗎？因而类 C 对于这两种运算中的任何一种，是一个群，特别是，一个交換群嗎？

5. 证明：对于乘法而言，所有的数构成的集合不是一个交換群，但是下面每个集合对于乘法是一个交換群：

(a) 所有異于 0 的数构成的集合；

(b) 所有正数构成的集合；

(c) 由 1 与 −1 两数构成的集合。

6. 考虑由 0 和 1 两数組成的集合 S，以及以下列公式定义在这个集合的元素之上的运算⊕：

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0,$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1。$$

判定集合 S 对于运算⊕是否构成一个交换群。

7. 考虑由 0, 1 和 2 三个数組成的集合 S, 在这个集合的元素上定义一个运算⊕, 使得对于这个运算, 集合 S 是一个交换群。

8. 证明：沒有由两个或三个不同的数所組成的一个集合，对于加法是一个交换群，是否有一个由单个的数所組成的集合，对于加法构成一个交换群？

9. 从公理 6—8 推演下列定理：

(a) $x+(y+z)=(z+x)+y$；

(b) $x+[y+(z+t)]=(t+y)+(x+z)$。

10. 如果仅仅根据公理 6—8 进行变换，由下面每一个表达式可以得出多少表达式：

$x+(y+z)$, $x+[y+(z+t)]$, $x+\{y+[z+(t+u)]\}$?

11. 簡明陈述运算 O 对于关系 R 的左单調的一般定义。

12. 根据我們所采取的公理以及从它們推演出来的定理证明：加法对于关系≠, ≦和≧是一个单調运算。

13. 对于关系<和>, 乘法是否是一个单調运算：

(a) 在所有的数构成的集合中；

(b) 在所有的正数构成的集合中；

(c) 在所有的負数构成的集合中？

14. 第 3 題定义的一些运算中，那些对于关系=, <, >, ≠, ≦和≧是单調的？

15. 类的加法和乘法对于包含关系是单調的嗎？对于 §24 中所討論的类之間的任何其它关系呢？

16. 从我們的公理推演下列定理：

如果 $x<y$ 而且 $z<t$；那么 $x+z<y+t$。

在这个語句中依次以“$>$”，“$=$”，“$\neq$”，“$\leq$”和“$\geq$”代换符号“$<$”，考察这样所得的語句是否是真的。

17. 在算术和几何的范圍内給出閉語句系統的例子。

18. 从我們的公理推演下列定理：

(a) 如果 $x+x=y+y$，那么 $x=y$；

(b) 如果 $x+x<y+y$，那么 $x<y$；

(c) 如果 $x+x>y+y$，那么 $x>y$。

提示：首先证明这些語句的逆語句（用第 16 題的結果），然后证明它們构成一个閉系統。

*19. 如果一个定理能够只从公理 6—9 推演出来，那么它能够推广到任意的交换群中去，因为对于一个运算 O 构成一个交换群的每一类 K，同这个运算一起构成公理 6—9 的一个模型（参看 §37 和 §38）。这一点特别适用于定理 11（由于这个定理的第二个证明），因而我們有以下一般的群論定理：

对于运算 O 是一个交换群的每一类 K 滿足以下条件：

如果 $x\in K, y\in K, z\in K$ 而且 $xOy=xOz$，那么 $y=z$。

給出这个定理的严格证明。

另一方面，证明：第 18 題的定理(a)不能推广到任意的交换群中去，用举出类 K 和运算 O 的一个例子的方法加以证明，类 K 和运算 O 具有以下性质：(i) 类 K 对于运算 O 是一个交换群，(ii) 类 K 中有两个不同的元素 x 和 y，对于 x 和 y 有：$xOx=yOy$（参看第 6 題）。因而，定理(a)能不能只从公理 6—9 推演出来？

20. 变换定理 14 的证明，使它符合 §49 中大致叙述的，与定理 11 的第一个证明相联系的模式。

21. 可否說，除法运算在所有的数构成的集合中是乘法运算的

反运算？

22. 第3题和第4题中提到的运算有沒有反运算（在所有的数构成的集合中或者在所有的几何图形的类中）？

23. 什么运算是减法（在所有的数构成的集合中）的左反运算和右反运算？

*24. 在§53中符号“0”的定义是作为例子陈述出来的。为了使这个定义确实不致导致矛盾，在这个定义的前面应該有如下的定理：

恰恰有一个数 x，使得对于任何数 y，我們有：$y+x=y$。

只用公理6—9证明这个定理。

25. 簡明陈述这样一些語句，它們分别断定减法是可行的，交换的，結合的，右可反的和左可反的以及对于小于关系为右单調的和左单調的。这些語句中那一些是眞的？用我們的公理和§52中的定义2证明那些眞的語句。

26. 从我們的公理和定义2推演下列定理：

(a) $x-(y+z)=(x-y)-z$,

(b) $x-(y-z)=(x-y)+z$,

(c) $x+y=x-[(x-y)-x]$。

*27. 用减法的可行性定律和上一题的定理(c)，证明下列定理：

数的集合 K 对于加法是一个交换群，必須且只須，集合 K 的任何两数的差仍然屬于集合 K（也就是，公式 $x\in K$ 和 $y\in K$ 永远蘊函 $x-y\in K$）。

用这个定理找出一些数的集合的例子，它們是对于加法的交换群。

28. 用邏輯符号写出上二章所給的公理、定义和定理。

提示：在用符号表示定理15以前，先把它置于一个等价的形

式中，其中的数值量詞由于 §20 所作的解釋已經被消去。

(IX) 关于所构造的理論的方法論的討論

§55. 在原来的公理系統中消去多余的公理

前面两章专門給出一个初等数学理論基础的概要。本章我們将討論理論建立于其上的公理系統和基本詞項，这种討論具有方法論的性质。

我們将从一些具体的例子开始，說明 §39 中关于公理和基本詞項的选擇的随意性，多余的公理可以省略等等。

让我們从以下問題开始，是否公理 1—11 的系統——这个系統将簡称为系統 𝔄——可能含有多余的公理，也就是，是否有公理能够从系統的其余公理推演出来。我們将立即看出，回答并且肯定地回答这个問題是容易的。事实上，我們有：

系統 𝔄 的公理中有三个，即，公理 4 或 5 中的一个，公理 6，以及公理 10 或 11 中的一个能够从其余的公理推演出来。

証明。我們首先証明

(I) 公理 4 或 5 中的一个能够借助于公理 1—3 从另一个推演出来。

我們注意，定理 3 的証明仅仅根据——不論直接或間接——公理 1—3。另方面，如果我們已經有定理 3，我們可以按下面的推論方式从公理 4 推演出公理 5（或者从公理 5 推演出公理 4）：

如果

$$x>y \text{ 而且 } y>z,$$

那么，据定理 3，

$$y<x \text{ 而且 } z<y;$$

因此，应用定理 4（但以“z”代换其中的“x”，以“x”代换其中的“z”），我們得到：

$$z<x,$$

又据定理 3，上式蘊函：

$$x>z,$$

而这就是公理 5 的結論。

同样可以证明：

(II) 公理 10 或 11 中的一个能够借助于公理 1—3 从另一个推演出来。

最后，我們有：

(III) 公理 6 能够从公理 7—9 推演出来。

*后一断定的证明不十分簡单，而和定理 11 的第二个证明类似。已給任意二数 x 和 y，四次应用公理 9，逐个地引进四个新的数 u, w, z 和 v，令它們满足下列公式：

(1) $$y=y+u,$$

(2) $$u=x+w,$$

(3) $$y=w+z,$$

(4) $$z=y+v。$$

据交换律，从(1)我們有：

$$y=u+y;$$

将以上等式与(4)合在一起，而像在定理 11 的证明中那样进行論证，根据結合律，我們得到：

(5) $$z=u+z。$$

从(5)和(2)我們得到：

$$z=(x+w)+z,$$

由此，再据結合律，

$$z=x+(w+z),$$

由于(3)，由上式可得：

(6) $$z=x+y。$$

这样我們已經证明，对于任何两数 x 和 y，存在一数 z，对于 z(6)成立；而这正是公理 6 的內容。

可以补充一点：上面大致叙述的推論方式不仅适用于加法，按照 §37 和 §38 的一般論述，也适用于任何其它运算；在类 K 中交换的，結合的以及右可反的一个运算 O 在該类中也是可行的，因而类 K 对于运算 O 构成一个交换群(参看 §47)。*

現在我們已經知道系統 $\mathfrak{A}$ 至少包含三个多余的，因之可以省略的公理。因此，系統 $\mathfrak{A}$ 可以为以下八个公理組成的系統所代替：

公理 $1^{(1)}$. 对于任何数 x 和 y，我們有：$x=y$ 或者 $x<y$ 或者 $x>y$。

公理 $2^{(1)}$. 如果 $x<y$，那么 $y \nless x$。

公理 $3^{(1)}$. 如果 $x>y$，那么 $y \ngtr x$。

公理 $4^{(1)}$. 如果 $x<y$ 而且 $y<z$，那么 $x<z$。

公理 $5^{(1)}$. $x+y=y+x$。

公理 $6^{(1)}$. $x+(y+z)=(x+y)+z$。

公理 $7^{(1)}$. 对于任何数 x 和 y，有一数 z，使得 $x=y+z$。

公理 $8^{(1)}$. 如果 $y<z$，那么 $x+y<x+z$。

我們将称这个公理系統为系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$，現在我們有以下的結果：

系統 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 等价。

与原来系統比較，新的簡化了的公理系統，从美学观点和教学观点两方面看，都有一些缺点。对于两个基本符号“$<$”和“$>$”，它不再是对称的，关系 $<$ 的一些性质不加证明地被接受下来，而关系

$>$的完全类似的性质不得不首先加以证明。在新系統中，公理 6 也被省略，公理 6 具有非常初等并且直观上明显的性质，然而它之从系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 的公理推演出来是比較困难的。

§56. 化簡了的系統的公理的独立性

現在发生一个問題：是否系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$中还有任何其它多余的公理。我們将证明事实上不是如此：

$\mathfrak{A}^{(1)}$是互相独立的公理的系統。

为了确立以上陈述的方法論的命題，我們用凭借解釋的证明方法，这种方法在 §37 的一个特例中已經使用过。

我們要证明系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 中沒有一个公理可以从这个系統的其余公理推演出来。让我們考虑公理 $2^{(1)}$作为一个例子。假設我們在系統 $\mathfrak{B}^{(1)}$的公理中，把符号“$<$”全部代换为“$\leqq$”，而不以任何其它方式改变公理。作为这种变换的結果，除公理 $2^{(1)}$以外，沒有一个公理失去它的正确性；事实上，公理 $3^{(1)}$，$5^{(1)}$，$6^{(1)}$和 $7^{(1)}$，由于它們不包含符号“$<$”，仍然不变，而公理 $1^{(1)}$，$4^{(1)}$和 $8^{(1)}$ 变为一些算术定理，它們的证明，根据系統 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{A}^{(1)}$与符号“$\leqq$”的定义 1（参看 §46），沒有任何困难。因此，可以断言，所有的数构成的集合 N，关系$\leqq$和$>$，以及加法运算构成公理 $1^{(1)}$和 $3^{(1)}$—$8^{(1)}$的一个模型；这七个公理的系統于是在算术中有一个新的解釋。另一方面，可以立即看出，由公理 $2^{(1)}$經过变换得到的語句是假的，因为它的否定在算术中能够容易地证明；公式：

$$x \leqq y$$

并不常常排斥：

$$y \leqq x,$$

因为有数 x 和 y 同时满足两个不等式：

$$x \leqq y \text{ 而且 } y \leqq x$$

(自然，如果而且仅仅如果，x 和 y 相等，才是这种情形)。因此，如果一个人相信算术的无矛盾性（参看 §41），他不得不承认这一事实：从公理 2[(1)]得到的語句不是这个学科的一个定理。从此推演出公理 2[(1)]不能从系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$的其余公理推演出来；因为否則在任何解釋中，如果其它公理成立，这个公理也不会不正确(参看 §37 中类似的討論)。

使用同样的推理方法，但是应用其它适当的解釋，关于其它每一个公理可以得到同样的結果。

*一般地，用解釋证明的方法可以描述如下。問題是，证明某个語句 A 不是一已給演繹理論的公理或者其它命題的系統 $\mathfrak{S}$ 的一个推論。为了证明这一点，我們考虑一个任意的，假定是无矛盾的演繹的理論 $\mathfrak{T}$（在特殊的情形下，可能就是系統 $\mathfrak{S}$ 的命題所屬的同一个理論）。然后我們試着在这个理論之內找到系統 $\mathfrak{S}$ 的一个解釋，使得不是語句 A 本身，而是它的否定成为理論 $\mathfrak{T}$ 的一个定理(也可能是一个公理)。如果我們能够做到这一点，我們可以应用 §38 中陈述的演繹法定律。如我們所知，从这个定律推出，如果語句 A 能够从系統 $\mathfrak{S}$ 的命題推演出来，那么对于这个系統的任何解釋，它将仍然是正确的。因此，存在 $\mathfrak{S}$ 的一个解釋，对于这个解釋 A 不正确，这件事实是这一語句不能从系統 $\mathfrak{S}$ 推演出来的一个证明。更严格地説，它是以下条件語句的一个证明：

> 如果理論 $\mathfrak{T}$ 是无矛盾的，那么語句 A 不能从系統 $\mathfrak{S}$ 的命題推演出来。

何以必須包括理論 $\mathfrak{T}$ 是无矛盾的这一假定，其理由是容易理解的。因为如果不然，理論 $\mathfrak{T}$ 会把两个矛盾的語句包括在它的公理和定理之中，而我們不能仅从 $\mathfrak{T}$ 包含 A 的否定这一事实，推論出 $\mathfrak{T}$

不包含語句 A (或者无宁說 A 的解釋); 这样我們的論証就会不正确。

用上面的方法, 要得到一已給的公理系統的独立性的詳尽证明,在所討論的系統中有多少公理,上述的方法就得要应用多少次;每个公理依次地当作語句 A, 而 $\mathfrak{S}$ 就由系統的其余公理所組成。*

§57. 多余的基本詞項的消去和公理系統的继續化簡;一个有序交換群的概念

我們再一次回到公理系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$, 因为这个系統是独立的,它不能用去掉多余的公理的办法进一步化簡。不过,可以用不同的方法进一步化簡。因为事实表現出,系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$的基本詞項不是互相独立的。事实上,"<"和">"两个符号中的一个可以从基本詞項的目录中抹去,然后用另一个来定义它。从定理 3 可以很容易地看出这一点来;定理 3 由于它所具有的形式,可以看作是符号">"借助于符号"<"的一个定义,而如果在这个定理中我們把等价式的两边互换,我們可以把它当作符号"<"借助于符号">"的一个定义(在两种情形中以"我們說"这个短語放在定理的前面是合宜的;参看§11)。从教学的观点看,基本詞項的这种还原可能引起某些反对意見;因为詞項"<"和">"在意义上是同样清楚,而且它們所指的关系具有完全类似的性质,因而把其中的一个看作是直接可以理解的,而另一个必須借助于第一个来定义,这种做法会显得有些不自然。但是这些反对意見不大使人信服。

如果現在不顾任何教学上的考虑,我們决定从基本詞項的目录中消去所說的符号中的一个,使我們的公理具有一种形式,其中沒有定义的詞項出現,这一件工作就产生了。(順便提一提,这是一个方法論的公設,实际上它常常被置之不理;特别是在几何中,为

增加公理的簡易性和明显性,常用定义的詞項陈述公理)。这件工作沒有任何困难;我們仅仅把公理系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 中的每一个这样的公式:

$$x>y$$

代换以公式: $$y<x,$$

据定理 3, 两公式是等价的。然后容易看出, 公理 1 可以为連通性定律,即定理 4 所代替,因为根据邏輯的(即,語句演算的)一般定律两者可以互相推出;現在公理 3 成为公理 2 的一个单純代换,因而可以略去。这样我們得到由以下七个公理組成的系統:

公理 $1^{(2)}$. 如果 $x\neq y$, 那么 $x<y$ 或 $y<x$。

公理 $2^{(2)}$. 如果 $x<y$, 那么 $y\not<x$。

公理 $3^{(2)}$. 如果 $x<y$ 而且 $y<z$, 那么 $x<z$。

公理 $4^{(2)}$. $x+y=y+x$。

公理 $5^{(2)}$. $x+(y+z)=(x+y)+z$。

公理 $6^{(2)}$. 对于任何数 x 和 y, 有一个数 z, 使得 $x=y+z$。

公理 $7^{(2)}$. 如果 $y<z$, 那么 $x+y<x+z$。

这个公理系統称为系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$, 它与前面两个系統 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 的任何一个等价。不过,这么說不严格;因为不可能从系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的公理推演出系統 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 的那些含有符号"$>$"的語句, 除非系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$由于加进这个符号的定义而扩充。如我們所知,我們可以予这个定义以以下形式:

定义 $1^{(2)}$. 我們說, $x>y$, 当且仅当, $y<x$。

我們也知道,这最后的語句如果不当作定义,而是当作一个普通的定理(在这种情形下,略去开头的短語"我們說"),那么它能够在系統 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{A}^{(1)}$ 的基础上证明。所討論的三个系統等价这一事实可以表示如下:

系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$和定义 $1^{(2)}$一起等价于系統

$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{A}^{(1)}$中的任一个。

每当比較两个等价的然而至少包含有一部分不同的基本詞項的公理系統时，需要用同样慎重的陈述方式。

公理系統$\mathfrak{A}^{(2)}$由于它的結构簡单而优越性显著，头三个公理是关于小于关系的，它們一起断定，集合N为这个关系排成一定次序；其次的三个公理是关于加法的，它們断定，集合N对于加法是一个交换群；末一个公理——单調定律——最后陈述小于关系和加法运算之間的一种相关性。一类K称为是对于关系R和运算O的一个有序交换群，如果(i)类K为关系R排成一定次序，(ii)类K是对于运算O的一个交换群，而且(iii)运算O在类K中对于关系R是单調的。按照这个用語我們可以說，数的集合为公理系統$\mathfrak{A}^{(2)}$描述为：对于小于关系和加法运算的一个有序交换群。

关于系統$\mathfrak{A}^{(2)}$可以确立以下事实：

> 系統$\mathfrak{A}^{(2)}$是一个独立的公理系統，而且所有它的基本詞項，即"N"，"$<$"和"$+$"是互相独立的。

我們略去这个命题的证明。我們只說，为了确立基本詞項的互相独立性，人們必須再次应用凭借解釋的证明的方法，不过这个方法在这个情形下要采取更为复杂的形式；篇幅不够，使我們不能深入討論为了这个目的这个方法所需要作的改变。

§58. 公理系統的进一步化簡；基本詞項系統的可能变换

系統$\mathfrak{A}^{(2)}$显然可以为任何一个与它等价的語句系統所代替。这里我們要給出这种系統的一个特别簡单的例子，这个系統可以称为系統$\mathfrak{A}^{(3)}$。它含有的基本詞項和$\mathfrak{A}^{(2)}$的相同，它只包含五个語句：

公理 $1^{(3)}$. 如果 $x \neq y$, 那么 $x<y$ 或 $y<x$。

公理 $2^{(3)}$. 如果 $x<y$, 那么 $y \nless x$。

公理 $3^{(3)}$. $x+(y+z)=(x+z)+y$。

公理 $4^{(3)}$. 对于任何数 x 和 y 有一数 z 使得 $x=y+z$。

公理 $5^{(3)}$. 如果 $x+z<y+t$, 那么 $x<y$ 或 $z<t$。

我們将证明

系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 与 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 等价。

证明。首先，我們注意，系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的所有公理或者包含在系統 $\mathfrak{A}$ 中(例如，公理 $2^{(3)}$ 与公理 2 相合，公理 $4^{(3)}$ 与公理 9 相合)，或者在系統 $\mathfrak{A}$ 的基础上被证明(公理 $1^{(3)}$, $3^{(3)}$ 和 $5^{(3)}$ 分别与定理 4，9 和 14 相合)。但是因为公理系統 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 等价，如我們从§57 知道的(定义 $1^{(2)}$ 毕竟总是可以加到系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 上去)，我們可以推断，系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的所有語句可以在系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的基础上证明。剩下的就是从系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的公理推演出系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的那些不在 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 中出现的語句，即公理 $3^{(2)}$, $4^{(2)}$, $5^{(2)}$ 和 $7^{(2)}$, 这件工作不是那么簡单。

我們从公理 $4^{(2)}$ 和 $5^{(2)}$ 开始。

(I)　公理 $4^{(2)}$ 能够从系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的公理推演出来。

因为，給定二数 x 和 y，我們可以应用公理 $4^{(3)}$ (但以"x"代其中的"y"，以"y"代其中的"x")，因而，有一个数 z，使得

(1)
$$y=x+z。$$

如果現在在公理 $3^{(3)}$ 中，我們以"x"代"y"，則得：

(2)
$$x+(x+z)=(x+z)+x。$$

由于(1)，以上等式两边的"$x+z$"可以用"y"替换，于是我們得到公理 $4^{(2)}$:

$$x+y=y+x。$$

(II)　公理 $5^{(2)}$ 能够从系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的公理推演出来。

事实上，据公理$3^{(3)}$我們有（如果以"y"代换"z"，以"z"代换"y"）：

$$x+(z+y)=(x+y)+z;$$

据(I)我們已經推演出交换律，由于交换律我們可以把这里的"$z+y$"代以"$y+z$"，于是我們得到公理$5^{(2)}$：

$$x+(y+z)=(x+y)+z。$$

为便于推演出公理$3^{(2)}$与$7^{(2)}$，我們将首先表明，前章陈述的一些公理和定理如何可以在系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的基础上证明。

(III) 定理1能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

我們只須注意，§44所給的定理1的证明仅仅是根据公理2，而公理2又与系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理$2^{(3)}$相合。

(IV) 公理6能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

事实上，在§55中我們已經知道公理6能够从公理7，8和9演繹出来，公理7和8与公理$4^{(2)}$和$5^{(2)}$相同，因而据(I)和(II)，能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。另一方面，公理9在系統$\mathfrak{A}^{(3)}$中作为公理$4^{(3)}$出現，所以，公理6是$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理的一个推論。

(V) 定理11能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

在定理11的第二个证明中，如§49中所給的，只用到公理7，8和9，因此定理11能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来，其理由与公理6相同；見(IV)。

(VI) 定理12能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

因为，假定定理12的假設成立：

$$x+y<x+z;$$

我們应用公理$5^{(3)}$，但以"y"，"x"和"z"分别替换公理$5^{(3)}$中的"z"，"y"和"t"。从此得出以下公式：

$$x<x \text{ 或 } y<z$$

中的一个必須成立；第一个可能必須被否定，因为它与定理1矛盾，而我們已經証明定理1可以从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$推演出来，——参看(III)。因此，定理12的結論：

$$y<z$$

必須成立。

(VII) 公理3[(2)]能够从系統$\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

让我們假定公理3[(2)]的假設，即公式：

(1) $$x<y$$

与

(2) $$y<z。$$

如果現在我們有：

$$y+x=y+z,$$

那么，据由(V)已經推演出来的定理11，推出

$$x=z。$$

于是在(1)中"x"可代換以"z"，而这将导致：

$$z<y。$$

由于公理2[(3)]这个不等式与(2)矛盾，因而必須被否定。于是我們有：

(3) $$y+x\neq y+z。$$

因为据公理6，$y+x$和$y+z$都是数，我們可以根据公理1[(3)]从(3)推論出以下两种情形：

(4) $$y+x<y+z \quad 或 \quad y+z<y+x$$

中的一个必須成立。考虑(4)的第二个公式，据已經推演出来的公理4[(2)]，我們可以把其中的"$y+x$"代換以"$x+y$"；这样我們得到：

$$y+z<x+y。$$

应用公理5[(3)]于上式，但以"y"代換公理5[(3)]中的"x"和"t"，以"x"

代换其中的"y"。用这种方法我們得到以下的推論：

$$y<x \text{ 或 } z<y。$$

但是这一个推論必須被否定，因为由于公理 $2^{(3)}$，它与(1)和(2)矛盾，而(1)和(2)构成公理 $3^{(2)}$的假設。因此我們回到(4)的第一个公式并应用由(VI)推演出来的定理 12，但以"x"代换定理 12 中的"y"，以"y"代换其中的"x"；于是我們得到：

$$x<z$$

而这就是公理 $3^{(2)}$的結論。

(VIII) 公理 $7^{(2)}$能够从系统 $\mathfrak{A}^{(3)}$的公理推演出来。

这里的方法与刚才所用的方法相似，但是更为簡单。我們假定公理 $7^{(2)}$的假設：

(1) $$y<z。$$

如果現在我們有：

$$x+y=x+z,$$

那么据定理 11 推出

$$y=z;$$

因此在(1)中我們可以用"z"代"y"，而得到一个与定理 1 相矛盾的公式，据(III)定理 1 已經推演出来。所以我們必須有：

$$x+y \neq x+z,$$

据公理 $1^{(3)}$，从此推出

(2) $$x+y<x+z \text{ 或 } x+z<x+y。$$

由于定理 12，以上不等式中的第二个导致：

$$z<y,$$

但是根据公理 $2^{(3)}$，上式与我們的假設(1)矛盾。因之我們必須承认不等式(2)中的第一个：

$$x+y<x+z,$$

而这就是公理 7$^{(2)}$的結論。*

用这种方法，我們知道系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的所有語句是系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的推論，反之亦然；因此两个公理系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$和 $\mathfrak{A}^{(3)}$确实証明是等价的。

无疑的，系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$較系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$簡单，因而比系統 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{A}^{(1)}$更簡单。比較系統 $\mathfrak{A}$与$\mathfrak{A}^{(3)}$是特別有趣的事；作为連續还原的結果，公理的数目减少了一大半。另一方面，也应該注意，系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 的某些語句(即，公理 3$^{(3)}$和 5$^{(3)}$)比其它系統的公理較不自然和复杂，某些，甚至是非常初等的，定理的证明在这里較之在其它系統的基础上也是更为复杂和困难。

如同公理系統一样，基本詞項的系統也可以为任何等价的系統所代替。这一点特別适用于"N"，"<"与"+"三个詞項的系統，这三个詞項在刚刚討論过的那些公理中作为仅有的基本詞項而出現。如果在这个系統中我們以符号"≦"代替符号"<"，我們得到一个等价的系統；因为"≦"是用"<"定义的，而定理 8 告訴我們，后者又如何可以用前者来定义。可是基本詞項系統的这样一种变换并无好处；特别是，对于公理的化簡并无帮助，对于那些对符号"<"較之对符号"≦"可能更为熟悉的讀者，这种变换甚至可能显得頗不自然。在原来的系統中将符号"+"代换以"$\dot{-}$"可以得到另一个等价的系統；但是这种变换也并不方便。最后，我們要指出，有其它的基本詞項系統与所討論的系統等价，却只包括两个詞項。

§59. 所构造理論的无矛盾性問題

現在我們簡单地討論一下，关于上面所考虑的一小部分算术的几个其它的方法論問題；这就是无矛盾性問題和完全性問題(参看 §41)。因为不論我們的說明涉及的是几个等价的公理系統中的那一个，都沒有什么关系，我們現在将总是討論系統 $\mathfrak{A}$。

如果我們相信全部算术的无矛盾性(前面曾經作此假定,在以下的討論中还要假定这一点),那么我們必定更要承认以下事实

建立在系統 $\mathfrak{A}$ 之上的数学理論是无矛盾的。

但是要給出全部数学的无矛盾性的严格证明,这一試图遇到了根本的困难(參看 §41),而对于系統 $\mathfrak{A}$ 的这种证明不仅是可能的甚至还比較簡单。理由之一就是,能够从公理系統 $\mathfrak{A}$ 推演出来的定理的变化的确是非常小的;例如,在它的基础上不可能回答这样非常初等的問題,即是否有任何数存在的問題。这种情形使得所討論的一部分算术不包含一对矛盾定理,这一事实的证明大为容易。不过用这里我們使用的工具,大致叙述无矛盾性的证明,甚或尝試着使讀者知道它的基本思想,都将是沒有希望的事;这需要比較深的邏輯知識,而一个重要的初步工作是把所討論的一部分算术改造成为一个形式化的演繹理論(參看 §40)。还可以补充一点,如果用一个說至少有两个不同的数存在这样的語句扩充系統 $\mathfrak{A}$,那么試图证明扩充了的公理系統的无矛盾性将会遇到困难,困难的程度就像在全部算术系統的情形下遇到的一样。

§60. 所构造理論的完全性证明

与无矛盾性問題相比較,系統 $\mathfrak{A}$ 的完全性問題处理起来要容易得多。

有許多完全用邏輯詞項和系統 $\mathfrak{A}$ 的基本詞項陈述的問題,它們无論如何都不容許在这个系統的基础上判定。上一节中已經提到一个这样的問題。以下語句給出另一个例子,这个語句說,对于任何数 x,有一个数 y,使得

$$x=y+y。$$

只在系統 $\mathfrak{A}$ 的公理的基础上,既不可能证明也不可能否证这个語

句。这一点可以从下面的討論看出。我們曾經用符号"N"表示所有实数构成的集合；也就是說，集合 N 包括整数和分数，有理数和无理数。但是立刻可以看出，如果我們用符号"N"表示所有整数(包括 0 在內的正和負的整数)构成的集合，或者所有有理数构成的集合，沒有一个公理，因而沒有一个从它們推出来的定理，会失去它們的正确性；也就是說，如果"数"这个字指"整数"或者指"有理数"，所有这些命題会仍然正确。上面提到的語句，也就是，断定对于任何給定的数有另外一个数是它的一半这样一个語句，在第一种情形下会是假的；在第二种情形下会是眞的。因此，如果我們在系統 $\mathfrak{A}$ 的基础上得以证明这个語句，我們会在整数算术的范圍內得到一个矛盾；另一方面，如果我們能够否证它，那么我們将发現自己在有理数算术的范圍內陷入矛盾。

这里大致叙述的論证属于用解釋证明的范疇(参看 §37 与 §56)；为了說明这一点，让我們将論证的陈述略加改变。令"I"指所有整数的集合，"R"指所有有理数的集合。現在我們将在算术范圍內給出系統 $\mathfrak{A}$ 的两种解釋，在两种解釋中符号"$<$"，"$>$"和"$+$"不变，而在每个公理中明显地或者隐含地出現的符号"N"在第一种解釋中为"I"所代替，在第二种解釋中为"R"所代替(这里我們不考虑 §43 中关于符号"N"可能消去所作的說明，因为这会使我們的推理略为复杂)。系統 $\mathfrak{A}$ 的所有公理在两种解釋中保持它們的正确性；不过，語句：

对于每一个数 x，有一个数 y，使得

$$x=y+y,$$

只在第二种解釋的情形下被滿足，而在第一种解釋的情形下它的否定成立：

并非对于每一个数 x，有一个数 y，使得

$$x=y+y。$$

在算术无矛盾的假定下，我們从第一种解釋推論出，所討論的語句不能在系統 $\mathfrak{A}$ 的基础上证明，而从第二种解釋推論出，它也不能被否证。

这样我們已經证明存在两个互相矛盾的語句，它們只用邏輯詞項和我們所考虑的数学理論的基本詞項来陈述，它們具有这种性质，即它們两个都不能从这个理論的公理推演出来。于是我們有：

建立在系統 $\mathfrak{A}$ 之上的数学理論是不完全的。

练　习

1. 让我們約定公式：

$$x \oslash y$$

作如下的解釋：

$$x+1<y,$$

現在請将§57的系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的公理中的符号"<"全部替以"⊘"，試判定那一个公理保持它的正确性那一个公理不保持，因而推論出公理 $1^{(2)}$ 不能够从其余的公理推演出来。这里所用的推論方法的名字是什么？

2. 依照 §56 大致叙述的公理 $2^{(1)}$ 的独立性证明的綫索，证明：公理 $2^{(2)}$ 不能从系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 的其余公理推演出来。

3. 令符号"$\mathring{N}$"指 0, 1 和 2 三个数組成的集合。在这个集合的元素之間我們定义一个关系 $\succeq$，規定它只在以下三种情形下成立：

$$0 \succeq 1,\ 1 \succeq 2,\ 2 \succeq 0。$$

此外，我們用以下公式定义一个在集合 $\mathring{N}$ 的元素之上的运算 $\dotplus$：

$$0 \dotplus 0 = 1 \dotplus 2 = 2 \dotplus 1 = 0,$$

$$0\overset{\circ}{+}1=1\overset{\circ}{+}0=2\overset{\circ}{+}2=1,$$

$$0\overset{\circ}{+}2=1\overset{\circ}{+}1=2\overset{\circ}{+}0=2。$$

現在在系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的公理中，以“$\mathring{N}$”，“$\overset{\circ}{<}$”和“$\overset{\circ}{+}$”分別替换这个系統的基本詞項（并以表达式“0，1 和 2 三个数中的一个”替换“数”这一个詞）；证明：經过这种变换，公理 $3^{(2)}$不能从其余的公理推演出来。

4. 为了用借解釋证明的方法表明：公理 $4^{(2)}$不能从系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的其余公理推演出来，只要在所有的公理中把加号换为第 VIII 章第 3 題中提到的四种运算中的某一个的符号。必須用到的是那一种运算？

5. 考慮适合以下公式：

$$x\oplus y=2\cdot(x+y)$$

的运算⊕。利用这个运算证明：公理 $5^{(2)}$不能从系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的其它公理演繹出来。

6. 构造这样一个数的集合，它与关系＜和运算＋一起，虽不滿足公理 $6^{(2)}$，但是构成系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的其余公理的一个模型。因此，关于公理 $6^{(2)}$的可推演性可以得出什么結論？

7. 为了证明公理 $7^{(2)}$不是系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的其它公理的一个推論，我們可以如此进行：在所有的公理中，把这个系統的两个基本詞項替换以第 3 題中引进的相应的符号，而让第三个基本詞項不变。試判定那一个詞項应該保留不变。

8. 第 1—7 題中所得的結果表明，沒有一个系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的公理能够从这个系統的其余公理推演出来。对 §55 的公理系統 $\mathfrak{A}^{(1)}$和 §58 的 $\mathfrak{A}^{(3)}$作出类似的独立性证明（部分使用上題中所用的解釋）。

9. 在公理系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的基础上，证明：对于加法运算是一个交换群的任何数的集合同时是对于小于关系和加法运算的一个有序交

换群。給出这种数的集合的一些例子。

10. 在第 VIII 章的第 5 題中給出了几个数的集合，它們对于乘法构成交换群。这些集合中的那一些对于小于关系和乘法运算是有序交換群，那些不是？

11. 用第 10 題中得到的結果，作出公理 7 $^{(2)}$对于系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的其余公理的独立性的新証明(参看练习 7)。

*12. 在公理系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$的基础上证明下列定理：

如果至少有两个不同的数，那么对于任何数 x，有一个数 y，使得 $x<y$。

作为这个結果的推广，证明下列一般的群論定理：

> 如果类 K 对于关系 R 和运算 O 是一个有序交换群，又如果 K 至少有两个元素，那么，对于 K 的任何元素 x，有 K 的一个元素 y，使得 $x\,Ry$。

利用这个定理证明：沒有一个是有序交换群的类能够剛好由两个，或者三个，等等元素所組成。它能够剛好包含一个元素嗎？(参看第 VIII 章的第 8 題。)

*13. 证明公理 $1^{(2)}$—$3^{(2)}$ 的系統(参看 §57)等价于由公理 $1^{(1)}$ 和以下語句所組成的系統：

如果 $x<y$，$y<z$，$z<t$，$t<u$ 而且 $u<v$，那么 $v\nless x$。

确立下列关系理論的一般定律作为以上結果的推广：

> 类 K 为关系 R 排成一个次序，必須且只須，R 在 K 中是連通的，而且滿足下列条件：
>
> 如果 x, y, z, t, u 和 v 是 K 的任何元素，而且如果 $x\,Ry$，yRz，$z\,Rt$，$t\,Ru$ 并且 $u\,Rv$，那么不是 vRx。

*14. 用 §48，§55 和 §58 的討論，证明以下三个語句系統等价：

(a) §47 的公理 6—9 的系統。

(b) §57 的公理 $4^{(2)}-6^{(2)}$ 的系統。

(c) §58 的公理 $3^{(3)}$ 和 $4^{(3)}$ 的系統。

推广这个結果，簡明陈述以下表达式的新定义：

类 K 对于运算 O 是一个交换群，

而且使它和 §47 所給的定义等价，但是較为簡单。

*15. 考虑由以下五个公理組成的系統 $\mathfrak{A}^{(4)}$：

公理 $1^{(4)}$. 如果 $x \neq y$，那么 $x < y$ 或 $y < x$。

公理 $2^{(4)}$. 如果 $x<y, y<z, z<t, t<u$，而且 $u<v$，那么 $v \nless x$。

公理 $3^{(4)}$. $x+(y+z)=(x+z)+y$。

公理 $4^{(4)}$. 对于任何数 x 和 y，有一个数 z，使得 $x=y+z$。

公理 $5^{(4)}$. 如果 $y<z$，那么 $x+y<x+z$。

用第 13 題和第 14 題的結果证明：系統 $\mathfrak{A}^{(4)}$ 等价于系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 和 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 中的每一个。

16. 在 §58 中曾經断定"N"，"<"和"+"三个基本詞項的系統等价于詞項"N"，"≦"和"+"的系統；对于这个断定实在应該补充一点：这些系統对于某一个語句系統，例如，对于 §58 的系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$ 和 §46 的定义 1，是等价的。討論：何以这一点补充是不可少的。一般而論，当要建立两个詞項的系統等价时（在 §39 的意义上），何以必須提到一个特殊的語句系統？

*17. 考虑由以下七个語句組成的系統 $\mathfrak{A}^{(5)}$：

公理 $1^{(5)}$. 对于任何数 x 和 y，我們有：$x \leq y$ 或 $y \leq x$。

公理 $2^{(5)}$. 如果 $x \leq y$ 而且 $y \leq x$，那么 $x=y$。

公理 $3^{(5)}$. 如果 $x \leq y$ 而且 $y \leq z$，那么 $x \leq z$。

公理 $4^{(5)}$. $x+y=y+x$。

公理 $5^{(5)}$. $x+(y+z)=(x+y)+z$。

公理 $6^{(5)}$. 对于任何数 x 和 y，有一个数 z，使得 $x=y+z$。

公理 $7^{(5)}$. 如果 $y \leqq z$, 那么 $x+y \leqq x+z$。

证明：如果将 §46 的定义 1 加到公理系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$（参見 §57）中去，将 §46 的定理 8 作为符号“$<$”的定义加到公理系統 $\mathfrak{A}^{(5)}$ 中去，那么两个系統成为等价的語句系統。为什么我們不可以簡单地說，系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 和 $\mathfrak{A}^{(5)}$ 等价？

18. 依照 §60 的論证的綫索证明：在系統 $\mathfrak{A}$ 的基础上，以下語句既不能证明也不能否证：

如果 $x<z$, 那么有一个数 y, 对于这个 y, $x<y$ 而且 $y<z$。

*19. 在系統 $\mathfrak{A}$ 的基础上证明：下列語句既不能证明也不能否证：

对于任何数 x, 有一个数 y, 使得 $x<y$。

*20. 在本章中，为了建立一个公理系統的独立性或不完全性，我們曾經使用凭借解釋以证明的方法。在討論公理系統的无矛盾性时也使用同样的方法。事实上，我們有以下方法論的定律供我們使用，这个定律是演繹法定律的一个推論：

如果演繹的理論 $\mathfrak{S}$ 在演繹的理論 $\mathfrak{T}$ 中有一个解釋，并且理論 $\mathfrak{T}$ 是无矛盾的，那么理論 $\mathfrak{S}$ 也是无矛盾的。

证明这个命题是正确的。在 §38 中关于算术和几何的可能解釋曾經作了一些說明；应用刚才所給的定律，从这些說明引申出关于算术和几何的无矛盾性，以及它們与邏輯的无矛盾性的关系的一些結論。

(X) 所构造的理論的扩充。实数算术的基础

§61. 实数算术的第一个公理系統

公理系統 $\mathfrak{A}$ 作为全部实数算术的基础是不够的，因为——如我們在 §60 中見到的——这个学科的許多定理不能从这个系統的公理演繹出来，而且也为了另一个重要性不下于前面所說的，恰好又十分类似的理由：能够找到一些属于算术領域的概念，它們不能用系統 $\mathfrak{A}$ 中出現的基本詞項来定义。例如，系統 $\mathfrak{A}$ 不能使我們定义乘法符号或除法符号，甚至像“1”，“2”等等这样一些符号。

为了得到构造全部实数算术的一个充分基础，我們的公理和基本詞項的系統必須如何改变和补充，这一問題立即提出来了。这个問題可以用种种方法解决。这里将大致叙述两种不同的解决方法。①

在第一种方法的情形下，我們选擇系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$（参見 §58）作为我們的起点；在这个系統中出現的基本詞項以外，我們加上“一”这一个字，像通常一样，这个字将为符号“1”所代替，系統的公理則为四个新的語句所补充。用这种方法得到一个新的系統 $\mathfrak{A}'$，它包括四个基本詞項“N”，“$<$”，“$+$”和“1”而且由九个公理所組成，这九个公理我們将明显地列举如下：

公理 1′. 如果 $x \neq y$，那么 $x < y$ 或 $y < x$。

① 全部实数算术的第一个公理系統是希尔伯特在 1900 年发表的；这个系統和我們下面将要熟悉的系統 $\mathfrak{A}''$ 有关。在 1900 年以前，人們已經知道一些較不丰富的算术部分的公理系統；这样的第一个系統是关于自然数算术的系統，它是貝安諾（参看第 115—116 頁注①）在 1889 年給出的。算术和它的不同部分的几个公理系統——特別是复数算术的第一个公理系統——是亨丁頓（参看第 135 頁注①）发表的。

公理 2′. 如果 $x<y$, 那么 $y \nless x$。

公理 3′. 如果 $x<z$, 那么有一个数 y, 使得 $x<y$ 而且 $y<z$。

公理 4′. 如果 K 和 L 是任何数的集合 (即, $K \subset \mathrm{N}$ 而且 $L \subset \mathrm{N}$)), 它們满足条件:

对于屬于 K 的任何 x 和屬于 L 的任何 y, 我們有: 如果 $x<y$, 那么有一个数 z, 对于这个 z, 下面的条件成立:

如果 x 是 K 的任一元素, 而 y 是 L 的任一元素, 又如果 $x \neq z$ 而且 $y \neq z$, 那么 $x<z$ 而且 $z<y$。

公理 5′. $x+(y+z)=(x+z)+y$。

公理 6′. 对于任何数 x 和 y, 有一个数 z, 使得 $x=y+z$。

公理 7′. 如果 $x+z<y+t$, 那么 $x<y$ 或 $z<t$。

公理 8′. $1 \in \mathrm{N}$。

公理 9′. $1<1+1$。

§62. 第一个公理系統的进一步描述, 它的方法論上的优点和教学上的缺点

前节列举的公理分为三类。第一类包括公理 1′—4′, 在这一类中只有"N"和"<"两个基本詞項出現; 公理 5′—7′ 屬于第二类, 在这一类中我們有加添的符号"+"; 最后, 第三类包括公理 8′ 和 9′, 新的符号"1"在其中出現。

在第一类公理中有两个我們以前沒有遇到过, 即公理 3′ 和 4′。公理 3′ 称为小于关系的**稠密性定律**——它表明小于关系在所有的数的集合中是稠密的。一般地我們說, 关系 R **在类** K **中是稠密的**, 如果对于这一类的任何二个元素, 公式:

$$xRy$$

总是蘊函存在类 K 的一个元素 z, 对于这个 z,

$$xRz \text{ 而且 } zRy$$

成立。公理 4′ 称为小于关系的**連續性定律**或者**連續性公理**，又或，**戴德鏗公理**(Dedekind's axiom)①；为了一般地陈述，在什么条件下，关系 R 称为**在**类 K **中是連續的**，只須在公理 4′ 中以"K"代替"**N**"(以及与此相联系，以"类 K 的元素"这一表达式代替"数"这一个詞)，并以"R"代替"$<$"。如果类 K 为关系 R 排成一定序列，又如果 R 在 K 中是稠密的或連續的，那么 K 分別称为**稠密地排成次序**或**連續地排成次序**。

公理 4′ 直觉上不如其余公理明显，而且是比較复杂；原因就在于它所涉及的不是个別的数，而是数的集合，因而和其它的公理不同。为了給这个公理一个比較簡单而且比較易于了解的形式，令下列定义在公理的前面，这样做是方便的：

我們說，数的集合 K 先于数的集合 L，当且仅当，K 的每一个数小于 L 的每一个数。

我們說，数 z 分隔数的集合 K 和数的集合 L，当且仅当，对于不同于 z 的任何两个元素，K 中的 x 和 L 中的 y，我們有：

$$x<z \text{ 而且 } z<y。$$

在这两个定义的基础上我們能够簡单地陈述連續性公理如下：

如果一个数的集合先于另一个数的集合，那么至少有一个数分隔这两个集合。

我們从前面的討論已經熟悉了第二类所有的公理。第三类公理虽然是新的，但是具有如此簡单和明显的內容，以致几乎不需要任何的解釋。或者我們仅作这样的說明，如果公理 9′ 的前面有符

① 这个公理是德国数学家戴德鏗(R. Dedekind, 1831—1916)創立的，不过他表示得稍为复杂一些。他的研究对于算术的基础，特別是无理数理論的基础，有巨大貢献。

号“0”的定义和表达式“正数”的定义，那么公理 9′ 可以为公式：

$$0<1$$

或者为語句：

1 是一个正数

所代替。

公理 1′, 2′, 5′, 6′ 和 7′ 正好构成我們所說的系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$，系統 $\mathfrak{A}^{(3)}$——就像等价的系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$一样——将所有的数构成的集合刻划为一个有序交换群（参看 §57）。考虑新加的公理 3′, 4′, 8′ 和 9′的內容，現在我們可以描写整个系統如下：

系統 $\mathfrak{A}'$ 表明，所有的数的集合对于<关系和加法运算是一个稠密地和連續地有序交换群，而且它在这个集合中挑出一个正的元素 1 来。

从方法論的观点看来，系統 $\mathfrak{A}'$ 有一些优点。就形式而論，在所有已經知道的构成全部算术的充足基础的公理系統中，它是最簡单的一个。除公理 1 以外——公理 1 可以从其余的公理推演出来，虽則并不十分容易——，这个系統的所有其它公理以及在这些公理中出現的基本詞項是互相独立的。另一方面，系統 $\mathfrak{A}'$ 的教学价值是較小的，因为基础的簡单使得进一步的构造相当复杂，甚至乘法的定义，和有关这个运算的基本定律的推演都不易于作出。几乎从一开始，論证就必須使用連續性公理（例如，沒有这个公理的帮助，在系統 $\mathfrak{A}'$ 的基础上就不可能证明数 $\frac{1}{2}$ 的存在，也就是，使得 $y+y=1$ 的数 y 的存在），并且初学者通常会发現根据这个公理所作的推論是頗为困难的。

§63. 实数算术的第二个公理系統

因为上面提到的理由，值得去寻找一个不同的公理系統，在这

个公理系統之上构造算术。一个这样的系統可以用以下方法得到。我們用系統 $\mathfrak{A}^{(2)}$ 作为我們的出发点。我們将采用三个新的基本詞項："零"，"一"和"积"；像通常一样，头两个将用符号"0"和"1"来代替，同时表达式"数(或因子) x 和 y 的积"(或"x 乘 y 的結果")将用习用的符号"$x \cdot y$"来代替。此外，将加进十三个新的公理；在这些新公理中，有两个是我們已經知道的，即連續性公理和加法的可行性定律。这样，最后我們得到系統 $\mathfrak{A}''$，$\mathfrak{A}''$ 包含六个基本詞項"N"，"<"，"+"，"0"，"·"和"1"，而且由以下二十个語句所組成：

公理 1″. 如果 $x \neq y$，那么 $x < y$ 或 $y < x$。

公理 2″. 如果 $x < y$，那么 $y \nless x$。

公理 3″. 如果 $x < y$ 而且 $y < z$，那么 $x < z$。

公理 4″. 如果 K 和 L 是任何滿足以下条件的数的集合：

对于屬于 K 的任何 x 和屬于 L 的任何 y，我們有：如果 $x < y$，那么有一个数 z，对于这个 z，下列条件成立：

如果 x 是 K 的任一元素而 y 是 L 的任一元素，又如果 $x \neq z$ 而且 $y \neq z$，那么 $x < z$ 而且 $z < y$。

公理 5″. 对于任何数 y 和 z 有一个数 x 使得 $x = y + z$ (换句話說：如果 $y \in \mathbf{N}$ 而且 $z \in \mathbf{N}$，那么 $y + z \in \mathbf{N}$)。

公理 6″. $x + y = y + x$。

公理 7″. $x + (y + z) = (x + y) + z$。

公理 8″. 对于任何数 x 和 y，有一个数 z，使得 $x = y + z$。

公理 9″. 如果 $y < z$，那么 $x + y < x + z$。

公理 10″. $0 \in \mathbf{N}$。

公理 11″. $x + 0 = x$。

公理 12″. 对于任何数 y 和 z，有一个数 x，使得 $x = y \cdot z$ (换句話說：如果 $y \in \mathbf{N}$ 而且 $z \in \mathbf{N}$，那么 $y \cdot z \in \mathbf{N}$)。

公理 13″. $x \cdot y = y \cdot x$。

公理 14″. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$。

公理 15″. 对于任何数 x 和 y，如果 $y \neq 0$，那么有一个数 z，使得 $x = y \cdot z$。

公理 16″. 如果 $0 < x$ 而且 $y < z$，那么 $x \cdot y < x \cdot z$。

公理 17″. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$。

公理 18″. $1 \in \mathbf{N}$。

公理 19″. $x \cdot 1 = x$。

公理 20″. $0 \neq 1$。

§64. 第二个公理系統的进一步描述；域的概念和有序域的概念

在系統 $\mathfrak{A}''$ 中，像在系統 $\mathfrak{A}'$ 中一样，可以区分三类公理。公理 1″—4″ 組成第一类公理，在其中我們只有两个基本詞項“N”和“<”；第二类公理由公理 5″—11″ 所构成，它包含另外两个符号：加号“+”和符号“0”；最后，第三类由公理 12″—20″ 所构成，它主要包含乘号“·”和符号“1”。

除公理 10″ 和 11″ 以外，头两类的所有公理是我們已經知道的。公理 10″和 11″一起說，0 是加法运算的一个(右)单位元素。一般地，一个元素 u 称为是运算 O 在类 K 中的一个右的或左的单位元素，如果 u 屬于 K，而且如果 K 的每一个元素 x 分别满足公式：

$$xOu = x \text{ 或 } uOx = x.$$

如果 u 既是一个右的又是一个左的单位元素，那么它簡单地称为运算 O 在类 K 中的一个单位元素；显然，在一个交换运算 O 的情形下，每一个右的或左的单位元素就是一个单位元素。

第三类的头三个公理，即公理 12″—14″，是乘法的可行性定

律、交换律和結合律；它們恰好对应于公理 $5''$—$7''$。公理 $15''$和$16''$称为乘法的右可反性定律和对于小于关系的乘法单調定律。这些公理对应于加法的可反性定律和单調定律，但不是十分准确的。差别在于这一事实，即它們的假設包含限制的条件："$y\neq 0$" 和 "$0<x$"；因此，尽管它們的名字如此，它們并不容許我們簡单地断定，乘法是可反的或者它对于$<$关系是单調的(在§47 和§49 的意义上)。

公理 $17''$ 建立加法和乘法之間的一个基本联系；它是所謂的乘法对于加法的分配律(或者严格地說，右分配律)。一般地說，运算 P 称为在类 K 中对于运算 O 是右分配的或左分配的，如果类 K 的任何三个元素 x, y 和 z 分别滿足公式：

$$xP(yOz)=(xPy)O(xPz)$$

或

$$(xOy)Pz=(xPz)O(yPz)。$$

如果运算 P 是交换的，右分配和左分配两个概念相合，我們簡单地說，运算 P 在类 K 中对于运算 O 是分配的。

最后三个公理是关于数 1 的。公理 $18''$ 和$19''$一起說，1 是乘法运算的一个右单位元素。公理 $20''$ 的內容不需要任何說明；这个公理在算术的构造中所起的作用要比最初設想的大，因为沒有它的帮助，不可能证明所有的数构成的集合是无穷的。

为了簡单地描述在公理 $5''$—$8''$, $12''$—$15''$ 和 $17''$ 中归之于加法和乘法的全部性质，我們說，这些公理将集合N 刻划为对于加法和乘法运算的一个域 (或者比較精确地說，一个交换域)。又如果考虑次序公理 $1''$—$3''$ 和单調公理 $9''$ 和 $16''$，集合 N 被刻划为对于$<$关系及加法运算和乘法运算的一个有序域。讀者会很容易地推測出来，域的概念和有序域的概念如何推广到任意的类，运算和关系上去。——最后，如果考虑連續性公理 $4''$ 和关于数 0 与 1 的公理，即公理 $10''$, $11''$, $18''$—$20''$，那么整个公理系統 $\mathfrak{A}''$ 的內容可

以描述如下：

系統 $\mathfrak{A}''$ 表明，所有数的集合是对于 $<$ 关系及加法和乘法二个运算的一个連續地有序域，系統 $\mathfrak{A}$ 还在这个集合中挑出两个不同的元素 0 和 1 来，其中 0 是加法的单位元素，而 1 是乘法的单位元素。

§65. 两个公理系統的等价；第二个系統的方法論上的缺点和教学上的优点

公理系統 $\mathfrak{A}'$ 和 $\mathfrak{A}''$ 是等价的（或者不如說，第一个系統一經增加符号"0"的定义和乘号"·"的定义——这两者可以利用它的基本詞項陈述出来——，两个系統就成为等价的）。不过，这个等价性的证明不容易。誠然从第二个系統的公理推演出第一个系統的公理不是特别困难；但是一涉及相反方向的工作，从我們早先的說明已經得出，在第一个系統的基础上，定义乘法和证明支配这个运算的基本定律（它們在第二个系統中作为公理出現）都相当困难。

系統 $\mathfrak{A}'$ 在方法論方面大大胜过系統 $\mathfrak{A}''$。在 $\mathfrak{A}''$ 中公理的数目是 $\mathfrak{A}'$ 中的两倍多。这些公理不是互相独立的；例如，公理 5″和12″，即加法和乘法的可行性定律，可以从其余公理推演出来，或者，如果保留这两个公理，其它的一些公理，如公理 6″，11″ 和14″，可以消去。基本詞項也不是独立的，因为其中的三个，即"$<$"，"0"和"1"，可以用其它的来定义（*在 §53 中已經陈述了符号"0"，的一个可能的定义*），因之公理的数目可以更加减少。

所以，我們知道系統 $\mathfrak{A}''$ 容許各种各样重要的化簡；但是作为这些化簡的結果，这个系統在教学上的优点会大大地减少。而这些优点确实是很大的。在系統 $\mathfrak{A}''$ 的基础上，可以毫无困难地发展实

数算术的最重要的部分，——如像数之間的基本关系的理論，加、減、乘、除四种初等算术运算的理論，綫性方程式，不等式和函数的理論。这里要用的推論方法是十分自然和非常初等的；特别是在这个阶段連續性公理完全不参加进来，只是当我們过渡到乘方、开方，取对数这些“高等”算术运算时，它才起重要的作用，而它对于无理数存在的证明則是不可少的。我們不知道有其它的公理和基本詞項的系統，为实数算术的一个初等的，同时是严格地演繹結构，提供一个更便利的基础。

练　习

1. 证明：所有正数的集合，关系<，乘法运算和数 2 构成系統 𝔄′ 的一个模型，因此，这个系統在算术中至少有两个不同的解釋。

2. 第 V 章第 6 題列举的关系中哪些是稠密的？

*3. 我們如何表示——用关系演算的符号——关系 R（在全类中）是稠密的？我們如何用关系演算中的一个等式表示关系 R 既是傳递的又是稠密的？（参看第 V 章练习第 17 題。）

4. 以下一些数的集合中哪些为关系<稠密地排成次序：

(a) 所有自然数的集合，

(b) 所有整数的集合，

(c) 所有有理数的集合，

(d) 所有正数的集合，

(e) 所有不等于 0 的数的集合？

*5. 为了在系統 𝔄′ 的基础上证明数 $\frac{1}{2}$ 的存在，也就是，使得

$$z+z=1$$

的数 z 的存在，我們可以如下进行。令 K 是所有满足

$$x+x<1$$

的数 x 的集合，同样地令 L 是所有滿足

$$1<y+y$$

的数 y 的集合。我們首先証明，集合 K 先于集合 L。現在应用連續性公理，我們得到分隔集合 K 和 L 的一个数 z。其次可以証明数 z 旣不能屬于 K（否則在 K 中就有一个数 x 大于 z）也不能屬于 L。从此我們能够推論 z 是所求的数，換句話說，

$$z+z=1$$

成立。詳細作出上面大致叙述的証明。

*6. 推广上題的方法，在系統 $\mathfrak{A}'$ 的基础上証明以下定理 T：

T. 对于任何数 x，有一个数 y，使得 $x=y+y$。

比較用这种方法得到的結果和 §60 的說明。

*7. 用上題中的定理 T 代替系統 $\mathfrak{A}'$ 中的公理 3′。証明这样得到的語句系統等价于系統 $\mathfrak{A}'$。

提示：为了从改变了的系統推演公理 3′，在 T 中以"$x+z$"代换"x"；由于公理 3′ 的假設，能够容易地証明，数 y 滿足这个公理的結論。

*8. 用借解釋証明的方法証明：在去掉公理 1 以后，系統 $\mathfrak{A}'$ 成为互相独立的公理的一个系統。

*9. 推广第 VIII 章练习第 2 題，給出公理系統 $\mathfrak{A}'$ 和 $\mathfrak{A}''$ 的一个几何解釋。

*10. 用邏輯符号写出系統 $\mathfrak{A}'$ 和 $\mathfrak{A}''$ 的所有公理。

11. 減法运算和除法运算以及在第 VIII 章练习第 3 題中提到的一些运算在所有的数构成的集合中有沒有右的或左的单位元素，或者簡单地說，单位元素？点集的加法运算和乘法运算在所有点集的类中有沒有单位元素？

*12. 証明：在一个类中交換的任何运算在这个类中至多有一

个单位元素。又，推广第 VIII 章练习第 24 題中得到的結果，证明以下群論定理：

如果类 K 是对于运算 O 的一个交换群，那么运算 O 在类 K 中恰恰有一个单位元素。

13. 考虑加、减、乘、除和乘方五种算术运算。簡明陈述这样一些語句，它們断定这些运算中的一个对于其它的运算是右分配的和左分配的(一共有40个这样的語句)，并且判定其中哪些是眞的。

14. 就第 VIII 章练习第 3 題中引进的 **A**, **B**, **G** 和 **L** 四种运算，解和上題相同的問題。又，证明：在某一个数的集合中可行的每一个运算，在这个集合中对于运算 **A** 和 **B** 是右分配的和左分配的。

15. 类的加法对于乘法是分配的嗎？反过来，类的乘法对于加法呢？(参看第 IV 章练习第 15 題。)

16. 第 4 題中列举的那些数的集合对于加法和乘法是域嗎，或者对于这些运算和关系 $<$ 是有序域嗎？

17. 证明：由数 0 和 1 組成的集合，对于第 VIII 章练习第 6 題中定义的运算 $\oplus$ 和乘法是一个域。

18. 找出在数 0, 1 和 2 上的这样两种运算，使得这三个数組成的集合对于这两种运算构成一个域。

19. 如何利用乘法定义符号"1"？

20. 以下定理可以从系統 $\mathfrak{A}''$ 的公理推演出来：

如果 $0<x$，那么有一个数 y，使得 $x=y\cdot y$。

假設这个定理已經证明，利用它从系統 $\mathfrak{A}''$ 的公理推演下列定理：

$x<y$，当且仅当，$x\neq y$，并且有一个数 z，使得 $x+z\cdot z=y$。

这个定理是否表明，§65 中关于系統 $\mathfrak{A}''$ 的基本詞項的数目可能减少所作的說明正确无誤？

*21. 在系統 $\mathfrak{A}''$ 的基础上证明第 6 題的定理 T。比較这个证明和第 6 題中关于系統 $\mathfrak{A}'$ 所提示的证明，两个证明中的哪一个比較困难和需要較多的邏輯概念的知識？

提示：为了从系統 $\mathfrak{A}''$ 推演定理 T，应用公理 15″，但以“1+1”和“y”分别代换“y”和“z”（不过，首先必須证明 1+1 不同于 0）；如是得到一个数 y，利用公理 13″，17″ 和 19″ 能够证明它满足定理 T 中所給的公式。

*22. 从系統 $\mathfrak{A}''$ 的公理推演系統 $\mathfrak{A}'$ 的所有公理。

提示：为了推演出公理 3′，可以假定第 6 題的定理 T 已經在系統 $\mathfrak{A}''$ 的基础上证明（参看前一练习）；由此用与第 7 題中相同的方法进行。

推荐的讀物

在本书結束的时候，我們想向讀者推荐一些著作，它們对加深与扩大本书所要求的知識是会有帮助的。在下面所列举的著作中，虽然沒有一本是系統地全面地討論了所有本书所談到的問題，但是，事实上，目前教科书关于本书研究的这个領域所提供的文献，还是相当貧乏的，我們很难举出許多既明白易懂又具备应有的严格性的书。

亨丁頓著：《代数的基本命題》(The Fundamental Propositions of Algebra)，J. W. 楊所編《有关初級的現代数学問題的論文集》(1911，紐約)中的第四本。

我們向对于本书最后两章所談問題有兴趣的讀者推荐这本书。讀者将会发現，在这本书中，关于实数与复数算术公理基础的方法論研究的成果有一簡要、准确与清楚的陈述。

路易士著：《符号邏輯研究》(A Survey of Symbolic Logic)，巴克萊 1918 年(已絕版)。

这本书中关于系統的部分，虽已有些过时，但是，关于历史的部分，却是值得极力地推荐。因为，这本书对于現代邏輯的发展提供了許多重要的与有系統的知識。

路易士与兰福德 (C. H. Langford)合著：《符号邏輯》(Symbolic Logic)，紐約 1932 年。

这本书包含了关于符号邏輯与演繹科学方法論方面非常有意义与重要的材料，特别是語句演算与它的方法論的材料。然而，它不能作为邏輯与方法論的系統教科书，因为，关于邏輯与方法論的

許多重要問題，它都沒有涉及。路易士教授在《符号邏輯研究》那本书中所提出的有价值的历史材料，沒有包含在这本书中。

罗素著：《数理哲学导論》(Introduction to Mathematical Philosophy)，倫敦1921年(2版)。

这本书对于現代邏輯的那些最重要的概念給予了清楚与易懂的說明，特別是关于那些证明数学是邏輯的一部分必須应用的概念。尤其是，在我們这本书中沒有討論或只是粗淺地涉及的問題，如类型理論或有关无穷公理与选擇公理的問題，在罗素这本书中都加以討論。这本书可以作为研究下面要提到的《数学原理》的准备讀物。

楊(J. W. Young)著：《关于代数与几何基本概念讲义》(Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry)，紐約，1911年。

在这本內容非常丰富的小书中，讀者将会看到許多屬于数学方法論領域的討論与例证。此外，讀者还可以从这本书中学习到一些关于一般集合論的基本概念。

烏德格(J. H. Woodger)著：《理論构造的技术》(The Technique of Theory Construction)，芝加哥，1939年，統一科学的国际百科全书，第2卷，第5号。

这篇短的論文，通过一个具体例子，将使讀者熟悉如何构造一个形式化的演繹理論的技术。这本书也包含了关于一般的方法論問題的討論与关于应用演繹方法到經驗科学的可能性与有效性的討論。我們极力地推荐这本书，特別是推荐給那些对最后一个問題有兴趣的讀者。

下面两本书比前面那些书要艰深得多：

卡尔納普著：《語言的邏輯語法》(The Logical Syntax of

Language), 紐約与倫敦, 1937 年。

这本书是重要的，但却是不容易讀的。它的內容相当于我們在 §42 中所談到的演繹科学方法論。这本书的重点，放在演繹科学方法論的研究成果方面，还不如放在概念工具的推演方面多。这本书在系統与推演部分的处理上是頗为簡略的，这要求讀者在抽象的演繹的思考方面有相当大的能力，来塡补书中的缺略，在有些地方，甚至来改正作者的論证。这本书特别值得推荐給那些对于方法論的研究的哲学意义有兴趣的讀者。在这本书的整个篇幅中，讀者将会看到許多有关上述問題的討論，尤其是在这本书的最后部分，还会看到对上述問題的系統意見。

怀特海与罗素著：《数学原理》，共 3 卷，劍桥 1925 年和 1927 年，第 2 版。

这本书曾經多次在我們的书中被引用过。这本书无疑地是现代邏輯的最有代表性的著作。同时，就它所产生的影响而論，它給邏輯研究的发展划出了一个新的时代。作者的目的，是要构造一个完全的邏輯系統，这个邏輯系統将給数学基础提供一个充分的根据。这本书彻底地全面地完成了这个任务（虽然不是在每个細节上都合乎今天方法論的最严格的要求）。对于多数人，学习这本用很多符号語言写成的书，将会是不容易的，但是，对于任何一个人，如果他想获得关于现代邏輯所用的概念工具的透彻知識，这本书却是不可少的。

从外国文献中，我們推荐下面这些书，在英文中，与它們严格相当的著作，还是找不到的：

卡尔納普著：《邏輯斯蒂綱要》(Abriss der Logistik)，維也納，1929 年《科学世界观論文》(Schriften zur Wissenschaftlichen Weltauffassung) 卷 2。

这本书虽然很短，但是，它給了現代邏輯的所有重要概念一个清楚的考察，因而，它是上面所提到的那本《数学原理》的通俗化。此外，在这本书中，我們可以看到一些应用邏輯概念与方法到其他科学中的有意义的例子。

格来林(K. Grelling)著：《集合論》(Mengenlehre)，萊比錫与柏林，1924年(《数学与物理丛书》，卷58)。

如果讀者想知道集合論一般理論的最重要概念与根本性成果，而又不想致力于更深入的研究，我們向讀者推荐这本容易讀懂的小书。

希尔伯特与阿克曼著：《数理邏輯綱要》(Grundzüge der theoretischen Logik)，柏林1938年，第2版《数理科学基础理論》(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)，卷27。

这本书概述了数理邏輯的那些初步的与基本的部分，并且討論了这些部分的最重要的方法論問題。这本书既严格又易懂，可以作为系統地与深入地研究邏輯与方法論的入門书。

蕭尔茲(H. Scholz)著：《邏輯史》(Geschichte der Logik)，柏林，1931年(《分科哲学史》，卷4)。

这本书对于邏輯从古代直到今天的发展給予了历史的叙述。作者对于現代邏輯的广泛的作用的相信，滲透在这书的每一頁中。文体的生动与鮮明，使得这本书甚至对一般人也是富有吸引力的。

希尔伯特与貝尔納斯著：《数学基础》(Grundlagen der Mathematik)，共2卷，1934年与1939年《数理科学基础理論》(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)，卷40与50。

这本书对数学方法論迄今所获得的較为重要的成果給予了一个丰富的、虽然不是全面的陈述(这里数学方法論是§42所談的那个意义)。由于作者在方法論方面的理論观点，这本书的重点，

是放在用所謂构造論方法所获得的那些研究成果上。对这本书(在同类书中，它是唯一的)沒有透彻的研究，就很难在方法論的領域中能够进行独立的研究工作。在讀这本书时，是会碰到一些困难的，讀者会感到，这本书中材料为甚么如此安排的理由不是很明显的；但是，从这本书所陈述的都是最新的研究成果与这本书所涉及的又是一个正在迅速发展的領域这个事实来看，上述那些缺点毕竟是很难避免的。

最后我們要提到一下，在美国有一个特别的社团，即符号邏輯学会，它联合了邏輯与方法論方面的所有科学工作者。从1936年起，这个学会发行了一种季刊：《符号邏輯杂志》(Journal of Symbolic Logic)，車尔赤与納盖主編。这个杂志既登載創造性論文，也登載关于目前邏輯文献的評論。这个期刊的卷1中有一篇車尔赤編纂的詳尽的目录，包括了1935年以前数理邏輯的全部著作，在卷3(1938)中又补充了这个目录。

俄譯本編輯部注

㈠作者在这里作为一个典型的形而上学者在发議論，他否认有改变着的本质，并且作为唯心主义者，他认为思維規律对于自然規律来說是第一性的。在現代数学中确实沒有考察“变数”概念，但并不是因为作者所指出的原因，而是因为为了用数学方法来研究，必須使所研究的概念服从于形式邏輯的規律，即对关于它們的某些屬性的問題可以給予完全确定的回答：“是”或“否”。(第2頁)

㈡我們要提醒說：在算术中有并不表示数的常項，例如加号“+”，不等号“>”等等。(第 4 頁)

㈢所以使用这种省略的术語，是因为如果在指示函項中以某个数字来代替变項符号，則它就变成了完全确定的(依所代入者而定)数字記号。(第 5 頁)

㈣我們要指出，这个命題也可以表述如下：无論我們怎样选取数 x 和 y，总可以找到由它們决定的数 z，使得

$$x=y+z。$$

这对于实数当然是正确的，因为它們是始終可以減除的。可是如果我們仅仅限于非負数，則并非对于任何一对数 x，y 都存在着数 z，使得 $x=y+z$。对于 $x=3$，$y=5$ 这一对数来說 z 就是不存在的。

我們还要指出，“可以找到”这个詞并不完全合适。只要求这种数存在着而不管我們能否找到它。(第 7 頁)

㈤我們要指出，在数学中有时并不加量詞。不过包含着自由变項的任何已证明的表达式(公理或公理的推論)，通常都被看作

为語句，而不是語句函項，并且认为自由变項是为全称量詞約束着的。

比如，作者所引的命題

$$a+b=b+a$$

或者

$$|\sin x|\leq 1,$$

或者

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

就是这样的。（第 7 頁）

㈥这里問題不在于思維經济。現代数学的符号标記对于理解和使用来說，确实比古代希腊人的方法方便（希腊人的方法是以語詞叙述一切对象和运算），因为补充了通常口語的标記对象和記述命題的符号方法，扩大了数学的可能性。（第 11 頁）

㈦这个一般陈述如下：

在語句函項的某个地方出現的变項在这个地方是約束的，当且仅当，这个变項在前面量詞中出現，而量詞的作用又及于語句函項的該部分。（第 14 頁）

㈧这里所談的一切当然都是有关形式邏輯的。作者所提到的所有术語中，最合适的是“数理邏輯”。数理这个詞之所以合适，是因为它研究的基本对象，是数理学科的邏輯結构及它所使用的证明方法，所以它本身也就作为数理学科建立起来。“邏輯斯蒂”这个术語特别不合适，因为現代外国資产阶級数理哲学的唯心主义流派之一常常同它相联系。（第 15 頁）

㈨如在序言中所指出的，作者常常作为形而上学者发表議論。比如在这里他假定任何命題不是真的就是假的，并且只能是非此即彼，以便由它們所发展起来的語句演算常常是可以机械地运用的。因此他沒有提出“語句”这个概念的定义。为了正确地理解

“关于語句演算”这一整章，需要注意，称之为語句的乃是或眞或假，并且只能是非此即彼的命題。（第16頁）

㊉但是由此不能得出結論說，似乎在数理邏輯中眞的概念实质上是不同于通常的意义的。問題的实质在于“如果…，那么…”这种联詞的定义上。要明白这一点，我且举一个例子。同一个“Канон”这个詞，在应用到比如宗教仪式或美学規則的总和上时，具有虽然相似的但毕竟基本上不同的意义。在应用到音乐上或印刷事业（它在那里只簡单地意味着“标題活字”）上时具有完全不同的意义。因此，关于这个詞在其中出現的詞句的眞或假的問題，只有在确定“Канон”这个詞在其中以何种意义来使用之后才能解决。同样，如果我們改变了联詞“如果…，那么…”的意义，則包含着这个联詞的表达式的眞或假的問題，应当視我們以何种意义来使用它而解决。如果像在作者所引证的例子中，我們只在下述論断的意义上来理解表达式“如果 A，那么 B”，即“A 是假的或者 B 是眞的”，也就是說两个判断“非 A”或“B”中，至少有一个是正确的（或者是非 A，或者是 B——如果存在的話），——則我們应当认为这两个命題都是眞的：“如果 $2\cdot2=5$，那么紐約是一大城市”，和“如果 $2\cdot2=5$，那么紐約是一小城市”。关于語句之間的这种排斥前者眞同时后者假（并以此为限）的可能性的联系——把它称之为条件語句并借助于联詞“如果…，那么…”来表示——有无意义这个問題乃是另一回事。可是数学证明的实踐表明，第一，在数学中經常与这种联詞打交道，并且第二，用联詞“如果…，那么…”来表达它們，决不会导致誤解。欲知其詳，請參見下面特別是下一节专門論述数学中的蘊函問題的一节。（第25頁）

㊉㊀联詞“如果…，那么…”在数学中通常也表明前件与后件之間的原因和結果的邏輯联系。可是由于数学反映着外在世界各

种对象之間的最簡单的联系，这些邏輯联系在那里只从外部方面来加以研究，于是它們好像是能够以形式蘊函的形式表現出来，而形式蘊函則是借助于实质蘊函和全称量詞来表現的。因为在数学以及与它有联系的数理邏輯中这种論证是足够的，所以在那里处理的是实质蘊函。可是在演繹科学的方法論中，对于邏輯联系的考察要深刻些，因此在这里实质蘊函的概念是不够的。(第 29 頁)

㊉㊁实质上这里所談的只是在所謂精确科学中遇到的定义。而且幷不假定該詞項在它被定义之前存在着，而是由定义本身引入的。比如，《$n!$》是借助于这种定义：$1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$ 的积的一种縮写而引入的。

欲知其詳，請参見本书第二部分。(第 33 頁)

㊉㊂这些語句的眞是从我們的实质蘊函的定义和从任何語句不是眞就是假幷且只能是非此即彼这种情况得出来的。現在我們来考察一下語句

$$(p\to q)\vee(q\to p),$$

即

(I) 从 p 得出 q，或者从 q 得出 p。因为任何語句不是眞的就是假的，幷且只能是非此即彼，所以只能在下列情况中出現：

(1) 語句 p 眞和語句 q 眞，

(2) 語句 p 假而語句 q 眞，

(3) 語句 p 眞而語句 q 假，

(4) 語句 p 假和語句 q 假。

在这四种情况的任何一种情况中語句 (I) 都是眞的。比如我們来檢驗第三种情况。

在这个情况中，語句“从 p 得出 q”是假的，因为 p 是眞的，而 q 是假的，而語句“从 q 得出 p”是眞的，因为 q 是假的，而 p 是眞的。

因为即使析取式的一个元素是眞的，析取式也是眞的，所以整个語句(I)是眞的。

如果为进行諸如此类的檢驗复杂語句的眞假值而編制图表，則即获得眞值表方法。(第 41 頁)

㈩㈣正确的代換，对于数理邏輯来說是一种从一般轉化为特殊的专門的方法。它的确切的表述是很难的。(第 46 頁)

㈩㈤可是数学的对象决不是机械地容許依照这里所指出的規則来論证。必須对形式邏輯規律可以应用的程度作专門的研究(这一点塔尔斯基作为一位学者，是知道得很淸楚的)。此外，数学体系是这样复杂，在其中犯錯誤不是怎样的难事。誠然，推論規則提供了經常找出錯誤的可能性。最后，在数学体系中，主要的不是依照完全的证明的全部規則来进行的个別論证，而是以一定的程序和一定的联系来进行的它們的整个进程。(第 47 頁)

㈩㈥語句(b)是眞的，如果是就除了星期一(那时它是假的)以外的一周內的任何一天来讲的話。这是用眞值表方法檢驗直接得来的。(第 47 頁)

㈩㈦选言的表达法——是这样一种方法，其中語句是以联詞“或者…，或者…”結合起来的。据此，語句(a)的选言表达法如下：**或者** x 不能为 10 除尽，或者 x 能为 2 和 5 除尽。(第 48 頁)

㈩㈧下面是最后三种表达式的表述：

(b) 从 p 得出 q，当且仅当 p 是假的或者 q 是眞的；

(c) 从 p 得出 q，当且仅当 p 或 q 是假的；

(d) 从 p 得出 q，当且仅当 q 是眞的，或者 p 是假的。

請注意(b)和(d)是眞語句，而(c)是假語句(如果在前面加一全称量詞的話)。(第 49 頁)

㈩㈨我們借助于表达式(a)总能够断定(如果某种論断是从其

他論断得出来的話）第二个論断是从第一个得来的。因为眞的語句是从任何語句得出来的（在实质蘊函的意义上），那末任何語句同它的否定一起都是能证明的。很明白，这样的邏輯沒有任何价值，因此語句(a)不能看作是眞的。請讀者自己分析語句（b）的情况。（第 50 頁）

㊁㊉我們要指出，这个定义只有在假定“屬性”的概念已知时才有意义。可是这个定律可以以代換規則的形式来表述，于是“屬性”的概念就不会明显地出現。这一規則的表述具有如下形式：

如果 p 等于 q，則在任何包含 p 的眞語句中，都可以在一个或几个地方以 p 代 q；反之，如果这一規則可以应用的話，則 p 等于 q。

我們要提醒：在通常的代換規則中，凡是遇到变項的地方都必須代換。

这个規則表述在下面，并且作者在这一章中所有的进一步的論证都以此为根据。（第 52 頁）

㊁㊀我們将借助于我們的規則来证明定律(II)，(III)及(IV)：

(II) $x=x$。

很明白，如果在任何包含 x 的語句中在一个或几个地方用自己代替它自己，則这个語句的意义是不会改变的。

(III) 如果 $x=y$，那么 $y=x$。

我們假定，如果在任何包含 x 的眞語句中，在一个或几个地方用 y 代 x，則所得語句仍为眞的。設語句 A 包含 y，如果我們在这个語句中用 x 来代 y，則得語句 B。

由 B 的否定得出 A 的否定，因为如果 B 的否定是眞的，則 A 的否定也是眞的，因为它是以几个地方用 y 代 x 而从 B 得出来的，而 $x=y$；如果 B 的否定是假的，則从它可以得出随便什么。因此

根据逆反定律从 A 得出 B 是正确的。如果現在 A 是眞的話，則按照分离規則，我們可以得出 B 也是眞的結論。这就是說，在任何包含 y 的眞語句中，我們可以在一个或几个地方用 x 来代它，即

$$y=x。$$

(IV) 如果 $x=y$ 且 $y=z$，那么 $x=z$。

如果我們在包含 x 的眞表达式中，在一个或几个地方用 y 来代它，則我們获得眞語句；然后如果我們在一切地方，都用 z 来代 y，則我們又获得眞語句。这就是說，如果我們在包含 x 的眞語句中，在一个或几个地方用 z 来代它，則我們又获得眞語句；因此 $x=z$。(第 55 頁)

㈡㈡概念及其名字的这种差别是非常重要的。这种差别在应用于指示函項和語句函項时具有特殊重要的意义。例如：

$$x^2+2x+3$$

这是个指示函項，如果我們用某数来代 x，它就获得数值。可是称为多項式的

$$“x^2+2x+3”$$

則是数学的另一个部門的对象了。这样，从指示函項和語句函項就获得了数学和数理邏輯其他部分所研究的个別对象。(第 58 頁)

㈡㈢这里作者又作为形而上学者在发表議論了；因为他认为在数学的一切部門，并且在任何情況下，对象都应該与自己同一。在数学的任何部門中根据同一律来作代換需要事先加以审查。关于相等和不等概念的相对性，由称为同余式理論的那个算术部門所证明。在这个部門中整数之間的差数如果等于已知数 n，則这些整数就被认为是相等的。不錯，在数学中通常檢驗是否可以应用同一律是非常簡单的，因此常被忽略了。(第 59 頁)

㈡㈣在語句的有內容的邏輯結构中，变項正是标志着語句。屬

性就是眞或假——这是語句本身的屬性，而語句的演算則研究这种屬性，这种屬性只是依語句的外部形式而定。(显然，塔尔斯基认为在語句演算中所論断的只是关于語句的名字的屬性。)(第64頁)

㊁㊄必須指出，对数学來說，通常的邏輯推論必須先限定被认为是个体的对象的范圍，并且所考察的类仅仅由这些对象构成。(第65頁)

㊁㊅在这一节中研究作为新的单个对象的語句函項。参見注㊂㊂。(第70頁)

㊁㊆我們再一次提醒：許多个体对象的范圍，亦即个体域，或者像現在我們所可以說的，一切个体的类，应該认为是在推論过程中被精确限定的。不錯，在数学和数理邏輯中，各种不同的对象域(視所研究的問題而定)都被作为一切个体的类来考察。(第70頁)

㊁㊇这些問題在現代邏輯中具有非常重要的意义。問題在于，如果容許像在类的理論中所应用的那种类型的一切推論，則可以以各种不同的方法达到矛盾(这就是所謂集合論的詩論)。因为形式邏輯的方法不容許矛盾(否則它就会沒有任何价值)，所以就发生縮小这一类型推論范圍的要求。可是因为数学的許多部門沒有这种推論就不行，所以每一次都需要研究其应用的可能性，而不是根本拋棄它們。罗素的邏輯类型論企图使这种研究成为多余的，这种理論基本上是靠限制数学的邏輯工具的儲备并使之复杂化。最近苏联学者波茨瓦尔和諾維科夫获得了完全不同于罗素派的非常宝貴的結果。(第71頁)

㊁㊈請讀者注意类的理論中$K \subset L$的关系和語句理論中$p \to q$的关系的平行性。(第72頁)

㊂㊉再請讀者注意类的理論中加法、乘法和求余类的运算与語句理論中邏輯和、积及否定运算的平行性。(第76頁)

㊂㊀下面在 §33 中作者自己指出他关于等势类及关于基数的議論不是完全确切清楚的。我們认为，为了叙述的联系性，这些概念必須在这里解釋清楚。

設我們有两个类 K 和 L；我們怎样最好地比較这两个类的元素的个数呢？大家都知道其中的一个做法：数一数这个类和那个类的元素，并比較所获得的数目。可是这个方法不是随时都可以应用的。例如我們来考察个体对象就是正整数的場合；試比較偶数的类和非偶数的类。很明白，不能一个一个地数这两个类中的数，于是我們不得不放棄比較每一个类中的元素的数目的意图，或者是想出另一种比較方法。

原来我們所知道的那种方法，除了以上指出的一点以外，并且还不是最簡单的。还有另一种比較两个类的方法，让我們举例来説明。假定我們要知道"狄納摩"运动場票子数目够不够。要了解这一点，完全不需要数一数有多少人排队买票。只需要把票卖給每一个人；如果票不够的話，則排队买票的人多于售票处的票，如果票有多余，則人少于售票处的票(实际上是卖給每个人两張票，可是我們为了簡单起見，假定卖給每个人一張票)。

当在售票处卖票时，这本身就确定了票与卖給票的人之間的某种联系。每一張卖給的票对应于买票的人，而买票的人則对应于他的票。用这个例子可以説明对应的概念。

在这个例子中类 K("狄納摩"运动場的票)和类 L(球迷)的元素之間有对应关系。假定一切票都售出了（如在两个强队之間进行比賽时常有的情形），則 K 类的每个元素都对应于 L 类的某个元素。如一切想买到票的人都有票（这差不多是不可能的情况），則 L 类的每一个元素都对应于 K 类的元素。在这种場合，很明白，这两个类的元素的数目是相同的。这样，我們就获得了比較两

个类的元素的数目的新方法：必須确定第一类的元素与第二类的元素之間的对应关系。

如果在K类的元素与L类的元素之間确定了这样的一种对应关系，即K类的每个元素对应于L类的元素，而L类的每个元素对应于K类的元素，并且K类的两个不同的元素对应于L类的两个不同的元素，L类的两个不同的元素对应于K类的两个不同的元素，则这种对应关系称为一一对应。

如果在K类和L类元素之間确定了一一对应关系，则这两个类称为等勢类。

現在我們用較为严格的概念——基数来代替我們先前“元素的数目”这个概念。K类的基数，是与K类等勢的一切类所具有而任何其他的类都不具有的屬性。如果我們有K类和L类两个类，则抽象地說可能有四种情况：

(1) K类与L类的某些子类等勢，L类与K类的某些子类等勢。

(2) K类与L类的某些子类等勢，但K类中不存在与L类等勢的子类。

(3) L类与K类的某些子类等勢，但L类中不存在与K类等勢的子类。

(4) K类中不存在与L类等勢的子类，L类中也不存在与K类等勢的子类。

在第一种情况下可以证明K类和L类是等勢的；在第二种情况下，自然会认为L类的基数大于K类的基数；而在第三种情况下，K类的基数大于L类的基数；最后，可以証明，第四种情况是不可能的（应該注意，整个类本身是自己的“非正常的”或“假”的子类）。既然第四种情况是不可能的，则无論K和L两个类是什么，

或者K类的基数大于L类的基数，或者K类的基数小于L类的基数，或者这两个类是等势的。因此基数可以加以比較，即两个不同的基数中，其中之一个大于另一个(为了要知道哪一个大，就必須挑选具有給定的基数的类，并把这两类加以比較)。

兹举数例。人的右手所有手指的集合与左手所有手指的集合等势：我們可以把具有同样名称的手指置于对应关系中。人的手和脚的所有指头的集合，具有比单是右手的指头的集合大的基数。小于100的所有一切数的集合，具有比小于50的所有一切数的集合較大的基数。

可是有一种集合，具有与它們自己相同的基数的“眞”子集。比如我們来考察一下整数0,1,2…的集合I；偶数0,2,4…的集合D是这个集合的眞子集。可是可以建立整数集I和偶数集D之間的一一对应关系，即令每一个整数n对应于二倍于它的偶数$2n$，令每一个偶数m对应于为它的一半的整数$\frac{m}{2}$，容易看出，这是一一对应关系。

类能够与自己的“眞”子类有一一对应关系。这种屬性，是无穷类不同于有穷类的特徵。我們要在这里指出：很多无穷类的基数等于自然数的类的基数。例如，自然数类的任何无穷子类的基数，等于整个类的基数，一切有理数集合的基数也是可数的(即所謂自然数类的基数)。可是存在着具有很大的基数的无穷类，例如圓弧上的一切点的类或者一切实数的类。

任何有穷类是与小于某个自然数n的所有自然数的类等势的。因此，有穷类的基数可以由某些自然数n来表征。(第77頁)

㊂㊁塔尔斯基說可以把算术还原为邏輯，这个論断是不正确的。因为为了还原必須把无穷公理引入邏輯，而无穷公理是有内容的数学公理，这样，全部算术連同无穷公理都一起被包含在邏輯

中了。(第 79 頁)

㊂㊂(a)我們說 $x=y$, 当且仅当,对于任何类 K, 从 x 包含在类 K 中, 推出 y 也包含在类 K 中, 反之亦然: 如果 y 包含在类 K 中, 則 x 也包含在类 K 中。

(b) 关于类 K 和类 L, 我們說 $K=L$, 当且仅当, 对于任何元素 x, 从 x 包含在 K 中, 推出 x 包含在 L 中, 反之亦然: 如果 x 包含在 L 中, 則 x 也包含在 K 中。(第 81 頁)

㊂㊃如果在类的演算中, 表示类的变項为表示語句的变項所代替, 而运算符号: 求余类的符号($'$)、和的符号 ($\cup$) 及交的符号($\cap$)相应地为否定符号($\sim$)、邏輯和($\vee$)及邏輯积($\wedge$)所代替, 則类的演算的公式会轉化为語句演算的相应公式, 而描述全类的公式会轉化为語句邏輯的眞値公式。其原因在于, 語句邏輯就是一共只有一个个体情形下的类的演算; 这时一共只有两类, 全类与空类, 我們令这两类对应于眞和假。

另一方面, 如果我們要考察語句函項

$$x\in K,\quad x\in L,$$

則我們又获得可用下列公式表現的語句演算与类演算的运算之間的对应关系:

$$x\in K\cup L\leftrightarrow(x\in K\vee x\in L),$$

$$x\in K\cap L\leftrightarrow(x\in K\wedge x\in L),$$

$$x\in K'\leftrightarrow\sim(x\in K)。$$

如果把蘊函 $A\rightarrow B$ 解釋为 $\sim A\vee B$ 的話, 可以用类似的方法建立与推論符号相应的运算。可是它沒有重大的意义。但类的演算还有另一种方式同語句演算联系着。即, 在 $K\subset L$ 的情况下, 如果我們考察一下类 K 和类 L, 則由于元素 x 具有类 K 的屬性, 将得出 x 具有类 L 屬性的結論, 用符号来表示就是:

$$K \subset L \leftrightarrow (x \in K \rightarrow x \in L)$$

这里記号→屬于語句演算。但是这种平行的情况是不完全的。

同时必須注意：类的演算較語句演算容易，至少是因为語句演算的运算是类演算的运算的特殊情形——即全类是由一个元素組成的。（第 82 頁）

㊂㊄标記的这种区别是因为在邏輯的其他部分所考察的是比如由相等关系联系在一起的諸对象，而这里相等关系本身是所研究的对象。这里我們所处理的是应用抽象法把屬性（集合）或关系作为对象的問題。在数学中常常应用这个方法，并且是非常有成效的。例如，在函数論中把函数，即数之間的某种关系作为对象。然后这个概念又被抽象，于是我們就得到一門新的数学学科，即泛函分析，其所研究的对象就是函数之間的对应关系。（第 89 頁）

㊂㊅我們将証明：R 在 K 类中如果是对称的、傳递的和自反的，則它定义一相等关系，如果把 K 类的子类作为对象来考察，其中每一个子类的任何一对元素 x 和 y 都滿足 R 关系。

設$[x]$为由所有一切元素 z 組成的类，对这些元素来說公式

$$xRz$$

成立。

我們必須証明

$$[x]=[y],$$

当且仅当

$$xRy。$$

設有 xRy；我們要証明在这种情况下 $[x]$ 类和 $[y]$ 类是重合的。事实上，如果 $z \in [x]$，即

$$xRz,$$

則公式 yRx 由于对称定律是正确的，而由于

$$yRx \text{ 和 } xRz,$$

按照傳递定律

$$yRz,$$

即 $z\in[y]$。

反之，如果 $z\in[y]$，即

$$yRz,$$

則由公式

$$xRy \quad \text{和} \quad yRz$$

由于 R 关系的傳递性而得出：

$$xRz,$$

即 $z\in[x]$。因此，如果元素 z 屬于$[x]$类，則它也屬于$[y]$类，反之，如果元素 z 屬于$[y]$类，則它也屬于$[x]$类，即$[x]$类和$[y]$类是重合的。

設$[x]$类和$[y]$类重合，我們要证明，在这种情况下有如下关系

$$xRy。$$

事实上，元素 y 屬于$[y]$类，因为由于 R 关系的自反性，公式

$$yRy$$

成立。从而 $y\in[x]$，因为$[y]$类和$[x]$类是重合的，由此得出：

$$xRy。$$ (第93頁)

㊂㊆如果 R 关系在 K 类中是不对称的、傳递的和連通的，則当公式

$$xRy$$

成立时，我們将說 x 先于 y。

由于这种关系不对称，如果 x 先于 y，則 y 不先于 x。又由于傳递性，如果 x 先于 y，而 y 先于 z，則 x 先于 z；由于連通性，x 和 y 两个元素中一个应該先于另一个。这些屬性也就說明为什么这

种关系被称为序列关系。(第 94 頁)

㊳可是这里所考察的是作者所混淆的不同的概念。在公式

$$xRy$$

中，R 是关系，xRy 在用事物代入 x 和 y 之后就成为眞或假；如果我們考察表达式 $R(y)$，則用某事物(适当的个体域內的事物)代入 y 之后，我們就得到事物，即一般地說不同于眞和假的某种东西。因此，R 在这里是指示函項。这两个概念之間的联系用如下的公理来表达：

任何单值关系 xRy 都与某些等式 $x=R(y)$ 等值，这里 R 是相应于 R 关系的指示函項。(第 96 頁)

㊴比如考察一下下列关系

$$(\mathbf{B}/\check{\mathbf{C}})\cup[\mathbf{H}/(\mathbf{S}/\check{\mathbf{C}})]:$$

$\check{\mathbf{C}}$——是"是父母亲"的关系：$x\mathbf{B}/\check{\mathbf{C}}y$——是有一个人 z，对他来說 x 是 z 的兄弟，而 z 是 y 的父母亲，即 x 是 y 的叔父或伯父或舅父。

$x\mathbf{S}/\check{\mathbf{C}}y$——是类似的：$x$ 是 y 的姑姑或姨母。

$x[\mathbf{H}/(\mathbf{S}/\check{\mathbf{C}})]y$ 的意思是：有一个人 z，对他来說

x 是 z 的丈夫，而 z 是 y 的姑姑或姨母。

簡言之：

x 是 y 的姑父或姨父。

因此 $x\{\mathbf{B}/\check{\mathbf{C}}\cup[\mathbf{H}/(\mathbf{S}/\check{\mathbf{C}})]\}y$ 的意思是：

x 是 y 的叔父或伯父、舅父、姑父、姨父。

这里还要指出：x 的姊妹的兄弟不一定是 x 的兄弟，这可以是 x 本身；用符号来表示：

$$\mathbf{B}/\mathbf{S}=\mathbf{B}\cup\mathbf{I}$$

(这里 I 是等同符号)。(第 106 頁)

㊵比如我們来考察一下上一个练习中的关系 B/F 和 F/B。

第一个表示叔伯，第二个是表示父亲（兄弟的父亲也就是父亲）。现在我們将证明第二个論断。設下列公式是正确的

$$x\breve{(R/S)}y;$$

这就是說

$$y(R/S)x.$$

也是正确的，

即存在着满足 yRz 和 zSx 这样的 z，

因此：

存在着满足 $x\breve{S}z$ 和 $z\breve{R}y$ 这样的 z；

从而，

$$x\breve{S}/\breve{R}y.$$

另一方也同样证明。(第 107 頁)

㊃㊀(c)我們有

$$\sim xRx,$$

因为由于不对称，对于任何 y，包括 $y=x$ 在內，xRy 和 yRx 这两个公式中至少有一个是不正确的。上述公式等值于：

$$xR'x;$$

因此，R' 关系是自反的。

其次，xRy 和 yRx 这两个公式中，由于不对称，至少有一个是不正确的。这就是說，

$$xR'y \quad 或 \quad yR'x$$

这两个公式中，至少有一个是正确的。

(d) 設下列公式是正确的：

$$xR'y \quad 和 \quad yR'z;$$

換言之：

$$\sim xRy \quad 和 \quad \sim yRz;$$

由于 R 关系是連通的，由此得出

$$zRy \text{ 和 } yRx。$$

如果公式

$$xR'z$$

不是正确的，即公式

$$xRz$$

是正确的，則由于 R 关系的傳递性，

从公式

$$xRz \text{ 和 } zRy$$

可得出：

$$xRy。$$

因此，公式 $xR'z$ 是正确的。（第 111 頁）

㊃㊀xR/Ry 是表示存在着这样的 z，即

$$xRz \text{ 和 } zRy。$$

所有一切語句 $R/R \subset R$ 表示：

如果存在着这样的 z，即 xRz 和 zRy，則 xRy，这就是傳递性的定义。

公式 $D \subset R \cup \breve{R}$ 是表示：

如果 x 不同于 y，則 xRy 或 yRx——这是关系 R 的連通性的定义。

对称性的关系，类似的用下列公式来表示：

$$R = \breve{R},$$

不对称性則以下列公式来表示：

$$\breve{R} \subset R';$$

不傳递性用下列公式来表示：

$$R/R \subset R'。$$

公式 $R/\breve{R}\subset I$ 表示：

如果存在着这样的 z，即 xRz 和 $z\breve{R}y$（或 yRz），則 $x=y$。这是 R 关系单值的定义。（第 111 頁）

㊃㊂作者的这些議論是完全沒有內容的。他的理想沒有任何科学意义，并且数学学科的构造原則不是由于某种折衷办法而产生的。

实际上公理方法或演繹方法的任务是确定該学科命題之間的联系及其进一步的发展。（第 114 頁）

㊃㊃挑选某些命題作为公理不必是由于其明显性。例如，我們回忆一下洛巴契夫斯基几何学关于平行綫的公理就行了。（关于挑选公理，請参見本书 § 39 注㊄㊅。）（第 114 頁）

㊃㊄作者在下面（参見注㊅㊀）沒有遵守这个眞的定义。（第 114 頁）

㊃㊅作者在这里告訴我們：我們沒有权利利用这一点以建立演繹理論中命題的眞，可是却沒有提出关于我們所掌握的那些工具的完全观念。除了未定义的詞項和公理之外，还应該知道有可能从被认为是眞的語句获得也必須认为是眞的其他語句的規則。也許作者在这里是假定应用通常的推論規則；作者在下面（§40）指出必須有推論規則来构成演繹理論，并且他将在形式化的形式中考察这些規則。

在演繹理論中，除了公理和不定义的詞項之外，也提供可以用来获得这种理論的新語句——定理——的推論規則。必須指出：随着这种理論的发展，規則的儲备扩大了，因为每一个新证明的原理都可以用对于获得新定理适用的推論規則的形式表述出来（当然也可以借助于旧規則把它們推导出来）。

演繹方法的意义（除了建立該理論各命題之間的联系之外）在

于使用这种方法的那些科学中，沒有必要在实踐中檢驗該理論的一切原理；而只要檢驗該理論中基本原理的正确性及推导規則的可应用性就够了。（第 115 頁）

㊂㊆应当指出，用这种方法（并且是借助于推导規則）可以构成的，不是整个数理邏輯，而常常只是它的某些部分。（第 115 頁）

㊃㊇說欧几里德"几何原本"是实行演繹方法的例子是不正确的。比如，在其中沒有几何公理的体系：那里所表述的公理差不多都是关于邏輯的恒等概念的，而公設則是确定哪些課題欧几里德认为是已經解决了的（比如关于平行綫的公設，是以下列指令的形式表述的：在怎样的情况下求两条直綫的交点的課題可以认为是已經解决）；在該书中，把其他几何課題化为那些已认为解决了的課題，这一点占据着重要的地位。（第 115 頁）

㊃㊈如果认为在演繹理論中仅仅存在着有穷个基本原理（公理和能行的推論規則）則用演繹法几乎不能建立一个像样的数学理論，虽然有一个时候有人认为数学理論之所以不同于其他科学，是因为在数学理論中一切原理都可以由有穷个基本原理推导出来。单是算术就不可能用这样的方式建立起来。（第 116 頁）

㊄㊉这个闡述得非常好的例子表明：演繹科学的方法論，不仅对于一般地考察这些科学是必需的，而且可以借助于它在这些科学中获得重要的結果。关于解釋的問題，对于洛巴契夫斯基几何学具有重要意义。洛巴契夫斯基几何学，是由于对平行公理独立于几何学其他公理的方法論的研究而产生的。当洛巴契夫斯基几何学在普通几何学里得到解釋时，这个問題也就在积极的意义上最終解决了。（第 121 頁）

㊄㊀在使用这条定理时，毕竟需要某种程度的愼重。設我們的体系由下面一个公理組成

$$a=0\vee a=1。$$

从这个公理可以作为結論推导出（簡单地借助于全称量詞的另一种写法）：

$$(x)(x=0\vee x=1)。$$

很容易构成由两个元素組成的这个体系的模型，其中之一用符号 0 来表示，另一个用符号 1 来表示。可是由于輕率地应用演繹法定理所能获得的定理

$$a=0\vee a=1\rightarrow(x)(x=0\vee x=1)$$

是不正确的。

为了避免这样应用演繹法定理的可能性这个定理有时以下述这种方式来表述：

如果在演繹理論中，从公理 $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_n$ 得出定理 $\mathfrak{B}$，并且在証明这个定理时，沒有代入我們的公理中所有的变項，也沒有用量詞把它們約束起来，則下列邏輯定理是正确的：

$$\mathfrak{A}_1'\wedge\mathfrak{A}_2'\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_n'\rightarrow\mathfrak{B}',$$

这里 $\mathfrak{A}_k'$ 是这样得到的邏輯公式，即在表达式 $\mathfrak{A}_k$ 中該理論的一切詞項都用相应的邏輯变項来代替。如果在基本公理中沒有自由变項（这也就是在用塔尔斯基的叙述方法时所发生的），則可以不加附带条件：在証明中不能代入变項，并用量詞把它們約束起来。（第 122 頁）

㊄㊁作者不正确地把演繹方法的实踐意义同它的理論价值割裂开来。它的实踐意义正是由它的理論价值决定的，即由它借以正确地反映現实的东西决定的。不用馬赫主义者所喜欢的关于思維經济的議論，比較好的說法是：凡是对事情具有理論看法的人因此就拥有获得結果的較大的实际可能性。（第 123 頁）

㊄㊂如果理論的詞項被理解作变項，即不与某个一定的解釋

联系起来的話，則理論被看作是形式体系；这比起这种說法要确切些：我們把它們看作这样，好像我們不知道它們的意思一样。（第124頁）

㊄㊃問題不在于不能給予解釋的形式体系是沒有人对它感到兴趣的，而在于它对科学是沒有絲毫关系的，因为科学是研究現实的。（第124頁）

㊄㊄参見注㊂㊀（§26）。（第125頁）

㊄㊅关于每个演繹理論，都有考察公理和基本詞項的一切等价体系的問題。实质上这种考察的可能性表示該演繹理論的完善。在这种考察之后公理体系的选擇就不是自发地产生的，而是有意識地产生的，从理論闡述所期望的性质产生的。（第127頁）

㊄㊆只有在那些可以应用演繹方法和仅仅局限于它們的科学中，演繹方法才可以看做是最完善的。（第127頁）

㊄㊇作者在这里企图用唯心主义的（因为它不是以符合实在的現实为前提）客观眞理的定义（它要求遵守某些形式規則），来偸換以实踐标准为基础的客观眞理的概念。

形式化的眞实意义是以此为基础的，即它提供了可能性来表达关于所考察的科学理論的命題的一切无穷集合的一般原理。例如，要檢驗这个理論的一切命題具有某种屬性 S，只要证实下列这一点就足够了：理論的一切公理都具有这种屬性，推論的每一个可能的步驟把具有这种屬性的命題轉化为也具有这种屬性的命題。对于被考察的理論的公理体系来說不矛盾性和独立性的許多证明就是以类似的方式完成的。

因为命題的形成規則及变形規則（推論規則）同时带有对一切有內容的解釋都是共同的、形式的性质，所以"形式化"这个术語是完全恰当的。（第128頁）

㊄㊈我們已經指出，在形式化的理論中，符号在某种意义上被看作是变項，而不是什么也不表示的記号的結合；除此之外，我們要指出，沒有有內容的公理甚至不能建立完全形式化的理論：因为运用理論的符号的規則是有內容的。（第128頁）

㊅㊉关于这一点請参見注㊃㊅（§41的注）。（第129頁）

㊅㊀上面塔尔斯基断定：論证的方法論上的正确性恰好也是明确性和明显性所需要的，这里則相反地认为明确性和明显性是損害"方法論上的正确性"的。（第129頁）

㊅㊁这里塔尔斯基不是以他在§36（参見注㊃㊂）中所定义意义——即不是以可证明性的意义——来理解眞的。这里他的眞理观比較正确。語句的眞归根到底总是由实踐的标准来证明的。（第130頁）

㊅㊂这里問題不在于理論的理想性，而在于只有无矛盾的有內容的理論才能用演繹法来发展，因为在这种方法中必須利用形式邏輯的規律；只有在完全性的情况下，才能用演繹方法来发展全部理論。（第131頁）

㊅㊃塔尔斯基表明：可以建立不矛盾的理論，可是这种理論不能认为是眞的。在这个理論中下列所有語句都能证明：

有一正整数 x 对于它来說 $Q(x)$ 是不正确的[这里 $Q(x)$ 是某个固定的語句函項]。

$Q(1)$——是正确的。

$Q(2)$——是正确的。

…………………………

…………………………

$Q(n)$——是正确的。

…………………………

不能同时证明所有这些語句的演繹体系，称之为 ω—不矛盾的。（第 131 頁）

㊅㊄作者在这里沒有完全确切地描述事情。不是算术和几何不完全，而是所有包含算术（或高等几何）的相当大的部分的任何形式化理論都是不完全的，即不能把算术（和高等几何）完全形式化。（第 132 頁）

㊅㊅作者賦予"理論的"这个概念以不正确的意义（在这里及 §40 末），认为不存在的事物具有任何理論意义（他在 §40 末說：在理論上能够使所有数学学科都具有形式化的形式，可是我們剛才已看到就連算术也不能形式化）。

不矛盾性和完全性問題具有重大的理論意义和实踐意义。除了这一节之末所提到的关于这个問題的重要的研究之外，不矛盾性的相对证明在演繹理論的建立中占据重要的位置。在这些研究中，人們认为某种数学理論是不矛盾的，并且在这种条件下证明其他数学理論的不矛盾性（通常是借助于解釋）。例如，非欧几里德几何学（包括洛巴契夫斯基几何学）的不矛盾性是在欧几里德几何学不矛盾的假定下证明的。此外，对于算术来說至少在下述意义上也是能够证明不矛盾性的。如果对于每个自然数（数群）都可以能行地（即在实踐上）檢驗其眞的算术命題是可以证明的，則借助于整个自然数算术在它的这一部分上的解釋，可以证明算术的不矛盾性。这个結果是苏联数学家科尔莫戈洛夫在 1925 年获得的，然后又在 1933 年为哥德尔获得。不矛盾性在更为严格的意义上为干称和苏联数学家諾維科夫所证明。

某些数学家想看做某种数学理論可容許性标准的不矛盾性标准，不能与实踐标准对立起来。它是实踐标准在数学中的一种形式。比如，通常大多数不矛盾性的证明（絕对的和相对的）是建立

在模型的构造上的，即是建立在发現滿足該理論的客体上的。（第133頁）

㊅㊆全部命題演算是在这一练习和以下几个练习中可以利用的推論規則。請讀者注意記号∪和∩（这表示运算，即把某些函項从与它們联系的客体中分出来）不同于記号⊂（这表示它所联系着的客体之間的关系，即在代入具体的客体之后$K \subset L$表示眞或假）。这种区别以此表現在公理中：即記号⊂在公理中沒有其他記号也可出現，而記号∩和∪只是与記号⊂一起出現。（第135頁）

㊅㊇在檢驗了我們所研究的一切公理和定义是眞語句之后，我們应当进一步借助于同样的眞值表来檢驗我們的那些应用于眞語句的推論規則，是否重新給出眞語句（这是很容易做到的）；因为一切定理都是借助于連續应用推論規則从公理得到的，所以它們也是眞語句（参見注㊃㊇）。（第145頁）

㊅㊈这所以能发生，是因为如果公理体系是完全的，則任何能在所考察的理論范圍內表述的語句，都能被证明或者被推翻。这就是說，在我們体系中不能被证明的那些語句的否定是可以证明的。因此，如果我們增加这种語句的話，則有些語句和它的否定都将在体系中。在这里所談的完全性，通常称之为严格意义上的完全性。（第146頁）

俄譯本編輯部跋

塔尔斯基按其哲学观点来說接近于所謂“邏輯实证主义”（或“邏輯經驗主义”，如还有人这样称呼它的），而“邏輯实证主义”在最近二十年左右这个时期中曾在若干欧洲国家中广为傳播，現在則特别在美国被培植起来（其最著名的代表人物：在英国是維特根斯坦〔L. Wittgenstein〕和艾耶尔〔A. Ayer〕，在美国是以卡尔納普为首的前“維也納学派”的成員和波兰亡命者柯雪勃斯基〔A. Кожибский〕和塔尔斯基。像罗素、怀特海和杜威〔J. Dewey〕这些馬赫派的哲学反动分子也接近于这一流派）。

自以为独創和新穎的“邏輯实证主义”，按其原則立場来說，只是馬赫主义的继續，它企图利用数理邏輯的某些成就作投机，来弥补主观唯心主义的漏洞。“邏輯实证主义”的拥护者在作避免主观唯心主义必然要陷入的唯我論的絕望尝試时，使用了欺騙的手法，用邏輯上和数学上可論证性的标准（所謂“主观間的标准”）来偷换客观眞理的标准。

这个流派把我們經驗的全部材料都归結为“感觉材料”（sense-data）的概念，想以此来克服唯物主义和唯心主义，这种虛妄而反动的意图也接近于馬赫主义。据說“感觉材料”旣以“語句”或“命題”的形式表述出来，就成了“科学的原料”。两个基本哲学流派是这样“克服”的：它們之間的斗爭被宣称为是“假問題”，据說是沒有任何实在意义和作用的，因为这种“假問題”的产生似乎与历史要求和社会問題沒有任何联系，而只是一种我們日常語言不完善的結果。“科学經驗主义”（有人还这样称呼这派人）的拥护者，力图

在唯物主义和唯心主义圍繞着进行越来越尖銳斗爭的哲学的基本問題上使讀者糊塗，企图用語言学的問題来偸換哲学問題。唯物主义和唯心主义的“克服”，实际上原来是最平常的主观唯心主义。列宁当时关于馬赫主义者所說的一切話，完完全全适用于整个地站在巴克萊和休姆主观唯心主义基地上的“邏輯实证主义者”。关于这样的学者列宁曾經写道：他們在专門領域內能作出最有价值的工作，但是“一旦談到哲学問題的时候，……任何一句話都不可相信。”①

至于我們对本书的专門意見和补充，則可以归結如下。

1. 在塔尔斯基的书中有許多傳記和文献目录的历史性的附注。塔尔斯基在举出某位著者时，从不忘記指出他的国籍，但这却不是始終正确的。比如，十九世紀前半叶著名的捷克哲学家和数学家波察諾，他把他列入德国人之內（見第 103 頁）。奥地利政府曾禁止波察諾作任何公开的演說，于是他的那些包含着超过魏尔施特拉斯（K. Weierstrass）和康脫相应的发現三十多年的許多結果和思想的数学著作，只是在他逝世之后才能問世，——一些最基本的著作差不多在写成以后过了一百年才問世。

在这里編輯部对于下列这个情况也不能置若罔聞：塔尔斯基对于英国的、美国的、德国的和同他接近的波兰的邏輯学家和数学家在书中非常乐于（常常不只一次）提及，而对于俄国学者的著作則只字不提。

2. 在从事数理邏輯方面工作的苏联学者特別注意于能够直接作数学或技术应用的那些問題。站在辯证唯物主义立場上的苏联学者所研究的眞正的邏輯問題所以有意义，首先是因为这些問題

---

① 《列宁全集》第 14 卷，1957 年，人民出版社，第 362 頁。

駁斥了实证主义、形式主义、直覚主义与許多其他流派和色彩的現代越来越反动的唯心主义的立場。

3. 上世紀八十年代俄国有才能的天文观察家和喀山大学讲师柏拉頓·謝尔盖耶維奇·波列茨基（Платон Сергеевич Порецкий 1846—1907）在类演算（他首先把它作为邏輯推理理論来考察）方面，获得了非常出色的成果。

波列茨基与从事数理邏輯方面工作的其他先驅者（布尔、耶方斯〔W. S. Jevons〕、习玉德、皮尔斯）不同，他不夸張他所研究的問題的邏輯意义。波列茨基在他的巨著[①]《論解邏輯等式的諸方法及数理邏輯的轉换方法》（其中包含着1882年2月27日和3月23日在喀山大学所屬自然科学者协会数理部会議上宣讀的两个通报）中写道：

“三个运算的体系（相当于塔尔斯基书中所考察的以 $\cup$，$\cap$，等記号标示的类的运算。——編者注），对于构成完全的质推理（波列茨基所謂的质是指具有一个主目变項的語句函項。——編者注）是完全足够了，它向我們表明：以这三个运算为基础的对于质的形式的思維，甚至沒有包括代数思維，更不用說一般的数学思維了……因此，如果邏輯思維的一切过程确实建立在质推理理論的原理上，則必然将承认邏輯思維不仅不是一般的，而且相反地，是极其专門的，并且又是非常基本的，因为它只有与那些相当于代数的基本方面的量的思維的初步才能比較”（第XXI頁）。

但同时波列茨基清楚地意識到了这个体系在数理邏輯历史中所占的地位的重要性。他曾写道：“我們来看現在提請讀者审查的

① 波列茨基写了15部以上数理邏輯方面的著作，大部分都发表于喀山大学所屬的各种数理学会的刊物上。

著作时，我們应該說：(1)它包含着构成完全的并且完全成功的质推理理論的第一个試驗（不仅在我国文献中并且也在外国文献中）；(2)它是（除了闡述其他作者的方法的不多几頁以外）完全独立的著作，这部著作所以具有更为重大的意义，是因为这个理論的最一般的公式和方法，只有我們才最早获得。这个理論的整个部分(从推理到前提)，无論就方法来說还是就可能解决这一課題的思想本身来說，都完全独一无二地屬于我們”(第 XXIII—XXIV 頁)。

波列茨基这个估計的不錯，从下面这一点即可看出：虽然他的基本著作是用俄文写成的，并且刊載在不易得到的刊物上，但是外国的同道們都据此学习。例如，古杜拉 (L. Couturat) 在其名著《邏輯代数学》中叙述波列茨基的方法，是在邏輯代数学的整个发展中当时所能达到的（古杜拉的书于 1905 年間世）最完善的阶段。

4. 莫斯科大学教授伊凡·伊凡諾維奇·日加尔金(Иван Иванович Жегалкин 1869—1947) 关于数理邏輯的最初三部著作[①]，是在主題方面最接近于波里茨基的著作的。这些写得非常平易淺近的著作，一定能为理解塔尔斯基这本书的讀者所領会。

我們要指出：日加尔金是第一个建立下列这种形式的語句演算的人：用現代代数的語言来說即与模 2 的剩余环同构的代数环；換句話說，他建立了一种語句邏輯，类似只有 0 和 1 (任何整数除以 2 所得的余数)两个数的算术，这种算术只有两种运算：加和乘，这种运算不同于通常的只是 $1+1=0$ (两个奇数的和是偶数)。如果我們編制一張这种“2 数算术”的加法表和乘法表的話，则我們

① 日加尔金：《論符号邏輯命題計算的技术》，載《数学論文集》第 34 卷，第 1 册，1927 年；《符号邏輯的算术化》，Ⅰ. 載《数学論文集》第 35 卷，第 3—4册，1928 年；Ⅱ. 同上，第 36 卷，第 3—4 册，1929 年。

得到：

p	q	$p+q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p\cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

現在我們把“1”解釋作真的記号，“0”作为假的記号，于是我們的表就将获得如下的形式：

p	q	$p+q$
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	л

p	q	$p\cdot q$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л ①

显然，其中第二个相当于邏輯联詞“和”，第一个則相当于严格的不可兼的“或者”（“或者——或者”），即“或者 p，或者 q”形式的語句，只有在两个語句 p，q 中的一个，并且只是一个是真的时候，这个語句才是真的。此外，如果我們把記号“0”和“1”引入我們的演算本身之中，則語句邏輯的其余运算就不难还原为这两个运算，即加和乘。比如，p 的否定以 $p+1$ 的形式来表現。确实，否定由下表規定：

① “и”代表“真”，“л”代表“假”。——譯者注

p	$\sim p$
u	$л$
$л$	u

或者

p	$\sim p$
1	0
0	1

而对于 $p+1$，我們在"2 数算术"中有：

p	$p+1$
1	$1+1=0$
0	$0+1=1$

即恰恰与上表一样。因此，語句邏輯完全轉变为"2 数算术"。"2 数算术"的規律久已研究出，因此可以直接引用于演算复杂語句的技术中去。

不久以前，1946 年，在《巴黎科学院报告》中发表了拉兰（Lalan）的注記，他在其中提出了按照日加尔金的方法，把語句演算构成为代数环，但完全不提日加尔金的著作①。

日加尔金根据其語句（命題）演算进一步建立起謂詞（用塔尔斯基的术語是"語句函項"）演算，并且非常簡单漂亮地为只包含一位語句函項的公式，即为类的邏輯（并且不論是一次的还是二次的）（見本书第 71 頁），解决了判定問題（見本书第130—131頁）。日加尔金的其他著作都是論述一定种类的公式的更要复杂得多的情况的。他能为此解决（任何有穷域）我們現在知道在一般情况下②不能解决的判定問題。

5. 与物理学的危机一起开始的帝国主义时代自然科学的危机，很快就扩及到数学基础方面，早在战后（二十年代）年代，在那

① 評介拉兰注記的車尔赤注意到这一点。

② 参見本书第 132 頁。

里就已达到非常剧烈的程度。与数学的集合論的論证,特别是应用排中律于涉及无穷的对象域的存在判断有关的一些困难,使直觉主义者伯劳威尔(L. E. J. Brouwer)和維尔(H. Weyl)得出一个結論:看来好像已为魏尔施特拉斯、康脫和戴德鏗的工作已最后稳妥地論证了的数学分析的大厦,却建立在沙滩上。他們所提出的出路,就中要求从数学中排除一切非构造性的存在命題,即不是建立在能行地构造对象的基础上,而对象的存在却是确定了的命題。但是他們所提出的这种出路意味着加在数学上的如此严酷的限制,以及像伯劳威尔和維尔等这些学者的唯心主义哲学观点同其数学創造之間的如此无出路的矛盾是必然的,以致确实使他們只有宣告数学基础的毫无出路的危机。反对直觉主义者的有名的数学家希尔伯特企图在形式主义的道路上找寻摆脫困难的出路,即打算依靠使数学的命題丧失內容意义并把这門科学变为独特的公式游戏来寻找摆脫困难的出路。

早在1925年,苏联数学家科尔莫戈洛夫(A. H. Колмогоров)就发表了《論 tertium non datur 原则》①这一著作,勇敢而尖銳地反对非常有威信的数学家所持有的形式主义以及直觉主义。这一著作的基本思想在于指出一种方法,能够把古典数学的命題表現在与它們相当的"直觉主义的"命題中,同时并不破坏证明的联系,即把古典地证明了的命題,变成"直觉主义地"证明了的命題(=在可疑的場合不使用排中律)。这样,在唯物主义的处理下,就不为数学基础的危机留下任何余地了。因为我們既承认了經过論证的"直觉主义的"(构造的)数学,就必然要承认也經过論证的古典的数学(只要我們不武断地硬加上主观唯心主义的直觉主义的眞理

① 《論排中律》《数学論文集》,第32卷,第646—667頁(1924—1925)。

标准即可)。我們要指出,科尔莫戈洛夫的著作早七年就得出了哥德尔的有名的結果。哥德尔借助于类似的方法表明:"直觉主义的算术和数論只是較古典的算术和数論清楚一些,而在实际上則包含着整个古典的算术和数論,只是解釋稍有不同。"

哥德尔的另一个有名的結果(1932年)在于:抛棄排中律的"直觉主义的"命題邏輯不等价于用眞値表所构成的,容許不同"状态"(眞値)的有穷数的語句邏輯,哥德尔的这个結果为苏联数学家格里閒科(Гливенко, В. И.)預見到了。他还在1928年就机智地指出了伯劳威尔的邏輯与假設(除了眞和假以外)某种"第三种"状态是不相容的。1929年格里閒科除此外还证明了:古典語句邏輯中命題p是可以证明的,則在"直觉主义"邏輯中p的双重否定[$\sim(\sim p)$]也是可以证明的。如果$\sim p$可以古典地证明,則它也可以"直觉主义地"证明。

我們在談到"直觉主义"邏輯时,有意識地把这一名詞放在引号里。問題在于直觉主义者同意新康德派的馬赫主义主观唯心主义的观点。从这一馬赫主义主观唯心主义的立場来看,确实沒有摆脫他們所宣告的数学基础危机的出路。关于数学中在沒有根据地使用排中律的場合下产生的困难問題,使苏联科学家从根本不同的观点感到兴趣。科尔莫戈洛夫的著作(1932年)包含着把"直觉主义的"邏輯解釋为"問題演算",其中具有摆脫了直觉主义的認識論前提的对于"构造"邏輯的內容意义的唯物主义解釋。

6. 关于演繹理論不矛盾性的問題,塔尔斯基提到哥德尔的有名結果,这个結果对算术不矛盾性的直接(构造)证明的可能性一般地置疑。可是苏联数学家諾維科夫提出了按思想来說非常簡单且聪明的算术不矛盾性的证明。这个证明的基础是諾維科夫所建立的邏輯演算,这种演算除了語句邏輯的运算外,还假定无穷的

（可数的）邏輯和及邏輯积。①

如果这里所談的对象域是可数的（参見注㊂㊀），則这个域的一切对象都具有屬性 S 这个判断，就可以用以下这些判断的无穷积来代替："对象 a_1 具有屬性 S，对象 a_2 也具有屬性 S，……，对象 a_n 也具有屬性 S……"；而"存在着具有屬性 S 的对象"这个判断，則为以下这些判断的无穷和所代替："对象 a_1 具有屬性 S，或者对象 a_2 具有屬性 S，……，或者对象 a_n 具有屬性 S，或者……"。諾維科夫在假定只把能应用于无穷和"直觉主义"数学的那些推論工具应用于这些"和"和"积"之后，他就表明，在他的演算中，屬于这个演算的公式"A"是不能证明的。（如果"A"是可以证明的，則按代替規則从其中可以引出任何公式，——特別是 B 和 $\sim B$ 两个公式，其中一个是另一个的否定，即演算是矛盾的。反之，如果諾維科夫的演算是矛盾的，則其中可以证明任何公式，包括"A"在內。）

在这里特別出色的是諾維科夫所获得的不矛盾性证明，已經不仅仅包含邏輯意义，而且包含着直接的数学意义。即，如果我們有一个算术的語句函項 $F(x)$，它对于任何整数 x 的眞或假，能用有穷次运算来檢驗，如果我們能够一般地证明存在数 n，对于 n 来說，$F(n)$ 是眞命題，則从此"純粹的"存在证明中，照諾維科夫所提出的方法，我們就能求得数 n 的能行的計算方法；就可以說能够把可能性的证明变为使可能性轉变成現实的方法。②

7. 我們在序言中已經指出，恰巧是那些学者們圍繞着进行具有原則性的尖銳斗爭的数理邏輯和数学证明論的最有意思、爭論

① 《苏联科学院报告》第 XXIII 卷第 5 期，1939 年，《数学論文集》第 12 卷（德第 54 卷）第 2 期，1943 年，第 231—261 頁。

② 想較詳細地了解諾維科夫的計算的讀者，也可以参讀波茨瓦尔的著作《論一种計算邏輯和和邏輯积的比例演算》〔載《数学論文集》第 7 卷（德第 49 卷），第 1 期，1940 年，第 65—100 頁〕，其中包含着諾維科夫体系的全部证明。

最多的間題，在塔尔斯基的书中却簡单地迴避了。就中包括数理邏輯的詩論和与此有关的罗素的邏輯类型論間題，实际上这些問題塔尔斯基仅限于指出它們“屬于現代邏輯的最复杂的問題”（第71頁）。

其实这些問題苏联学者波茨瓦尔和諾維科夫① 已成功地找到了一种掌握塔尔斯基这本书的基本材料的讀者完全能够懂得的簡单且令人信服的解法。在我們看来，这个解法甚至在初等教科书中也特别值得詳細地闡述，因为这是一个昭然若揭的例子证明掌握唯物主义辯证法的原理对于形式邏輯方面的工作也是多么重要，反之，主观唯心主义的形而上学，当一旦涉及到較为精細的邏輯間題（比如，关于与这些間題相联系的对象域的改变）时，又如何不可避免地把研究者引入死胡同。

8. 俄国学者辛芬开尔（М. И. Шейнфинкель, 1887—1942）的著作在数理邏輯的发展史中起着重要作用。他是敖德薩的天才数学家夏图諾夫斯基（С. О. Шатуновский, 1859—1929）的学生。夏图諾夫斯基也发表了許多有关邏輯和数学的邏輯論证的重要且

① 波茨瓦尔：《論数理邏輯的詩論和集合論》，載《数学論文集》第15卷（德第57卷）第3期，1944年，第369—384頁。这部著作以下列这些話开始：“本文是以某种就作者所知到現在为止在已发表的与此問題有关的基本論著中倘未应用过的新观点来研究設有类型論的扩充的函項計算和所謂数理邏輯的詩論的。这种新观点非常簡单、明了而自然，同时以完全新的观点来提出整个詩論問題”。

又参見：

波茨瓦尔：《关于正常集合和謂詞的某些邏輯定理》，載《数学論文集》第16卷（德第58卷）第3期，1945年。

波茨瓦尔：《論一种三值計算及其应用于分析古典扩充函項計算的詩論》，載《数学論文集》第4卷（德第46卷），第2期，1938年。

波茨瓦尔：《关于一种三值計算不矛盾性問題》，載《数学論文集》第12卷（德第54卷），第3期，1943年。

諾維科夫：《論邏輯詩論》，載《苏联科学院报告》，1947年第LVI卷，第5期。

独創的思想①。

辛芬开尔在发表了以新方式闡明对数学家来說是基本的函数概念和开辟构造邏輯演算的新道路的深刻研究之后，很遺憾，因重病很早就离开了行列。辛芬开尔在1924年根据还在1920年所作的报告而发表的著作《論建筑数理邏輯大厦的磚石》，在美国邏輯学家和数学家凱立（H. B. Curry）和車尔赤的組合演算和λ-变換演算中被广为利用。（凱立的組合演算思想和車尔赤的“S-組合”思想直接来自辛芬开尔；車尔赤的λ-变換演算一般地是辛芬开尔关于函数的思想体系的形式化。）由于車尔赤关于判定問題的不可解的有名結果②正是他为了上升到辛芬开尔的組合論而获得的，所以他觉得是能够利用来获得直接的数学結果的。比如，苏联数学家馬尔科夫（A. A. Марков）就是以这种方式构成了一系列組合体系理論中的課題，而对于組合体系来說是不存在算法論的解法的③。

9. 苏联数学家馬尔采夫（A. И. Мальцев）的著作《論一种获得群論局部定理的一般方法》④，是論述数理邏輯的定理之一的直接的数学应用的。

递归函数論是現代数理邏輯的一章，递归函数論表明了它同解析集合論的联系，而递归函数論中的一系列結果是由諾維科夫和他所領导的討論班的参加者获得的。

10. 应用数理邏輯的工具于电工技术問題（与构造继电器接点图式有关）的优先权是属于年輕的苏联物理学家謝斯塔科夫（B. И.

① 参見契波塔里娃关于夏图諾夫斯基的論文，載《数学进展》，1940年第VII期，第314—321頁。

② 参見本书§41。

③ 《苏联科学院报告》，第LV卷，第7期及第LVIII卷第3期，1947年。

④ 《国立伊凡諾夫教育学院学报》，第1卷第1期，1941年。

Шестаков) 的。謝斯塔科夫的著作①早在1935年1月就已写好，可是遺憾的是沒有及时发表，虽然这部著作是他的候补博士学位論文的基础。苏联工程师加武里洛夫(Гаврилов, М. А.)为了解較复杂的继电器接点图式(其中除了包含串联的和并联的以外，还包含所謂“桥式”的)結构的符号观念的課題，构造了专門的演算②。

11. 我們对于苏联学者关于数理邏輯及其应用的著作可以继續大量評述。但是我們觉得所引証的已經足够证实两个基本論点：

(1) 数理邏輯之所以使苏联学者感到兴趣，首先是作为数学的一部分，作为新的数学分支，这种分支具有专門的工具和据有能够直接应用于数学和技术的結果和方法。

(2) 先进的苏联学者在其关于数理邏輯的著作中，不持虚伪的科学“无党派性”的立場，而塔尔斯基則是以“无党派性”的名义来說話的，实际上这是意味着为帝国主义反动派、煩瑣哲学和僧侶主义的目的服务的。我国学者持最先进的革命哲学即唯一能与我們时代的眞正科学相容的哲学——辯证唯物主义哲学——的观点，并准备在所有一切战綫上，包括与数理邏輯及数学的邏輯基础有关的問題方面，同反动势力宣战。

① 《继电器接点图式代数学》。在謝斯塔科夫的著作中，我們可以指出：《完全从两极构成的两极图式代数学（A-图式代数学）》，《技术物理杂志》，第XI卷第6期，1941年；《利用继电器接点图式实現的表达式的命題的特征函項的观念》，苏联科学院出版社，《数学丛刊》第10期，1946年，第529—552頁。

② 加武里洛夫的第一部著作《具有活門元件的继电器接点图式》发表于苏联科学院出版社出版的《技术丛刊》1945年第153—164頁。

索　引

这个索引包含着在这本书中用于专門意义的最重要的詞項和表达式以及正文中所列举的一些科学家的名字。跟在一个詞項后面的方括弧包含着在本书中用作与該詞項同义的一些表达式。

所有的数字都指明頁碼。粗体数字指明主要的詞項和最重要的頁碼。

一　画

二 画

三 画

四　　画

五　画

六 画

七 画

八 画

九 画

十　画

十一画

十 二 画

十四画

十五画

十七画

十 九 画



譯者后記

塔尔斯基(1902—，原籍波兰，1945 年入美国籍)的《邏輯与演繹科学方法論导論》，是一本頗为流行的数理邏輯入門书。1936 年以波兰文出版。1937 年譯成德文，1940 年又譯成英文，在 1946 年的英文譯本中，著者又作了一些小的修改。1948 年又譯成俄文。我們这个譯本，是根据 1946 年英文譯本譯出的。俄文譯本中，有一个长序，对本书內容作了評价；并附有編輯部的注和跋。我們也一并譯出，供讀者参考。

本书第一章至第五章，是周礼全翻譯的。第六章，是吳允曾翻譯的。第七章至第十章，是晏成书翻譯的。其中部分譯稿曾由顾寿观校訂过。序言和索引是承商务印书館編輯部协助翻譯編制的。

俄譯本的序言，是晏成书翻譯，俄譯本編輯部的注和跋，是郭英翻譯的，晏成书校訂的。

譯者　1962 年 4 月